Teste χ^2 de aderência

Chuck Norris* Arnold Schwarzenegger†

15 de julho de 2013

Resumo

O teste χ^2 de aderência é considerado para testar a hipótese de que uma distribuição de probabilidades as frequências de ocorrência de uma variável aleatória. O procedimento de aplicação do teste será descrito e uma aplicação será apresentada.

1 Motivação do teste

Um tipo de problema frequentemente encontrado é o de não se conhecer a distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X. No entanto, uma vez observada essa variável aleatória deseja-se testar a hipótese de que uma particular distribuição de probabilidades explica satisfatoriamente a sua ocorrência. Em outras palavras, quer-se testar a adesão de uma distribuição de probabilidades aos valores observados de uma variável aleatória.

2 Procedimento de teste

O procedimento para o teste requer que seja observada uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X. Essas observações são agrupadas em classes. Caso X seja uma v.a. qualitativa, os níveis observados

*Acadêmico do Curso de Estatística, grr: 12345678.
†Acadêmico do Curso de Estatística, grr: 87654321.

são as classes. No caso de X ser quantitativa pode-se agrupar os dados em classe tal como se faz para construir um histograma.

Seja O_i a frequência absoluta observada em cada uma das classes, $i = 1, \ldots, k$, em que k é o número total de classes. A partir da distribuição de probabilidade considerada no teste, ou seja, aquela definida na hipótese nula (H_0: X tem distribuição tal) aquela para qual vamos aplicar o teste, calcula-se as frequências esperadas da v.a. X, E_i.

A estatística do teste é

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}. \tag{1}$$

No caso de H_0 ser verdadeira, X_0^2 tem distribuição χ^2 com $k - 1 - p$ graus de liberdade. O número de parâmetros estimados sob H_0 é representado por p. A distribuição da estatística sob H_0 é cada mais parecida com a de referência a medida que o tamanho da amostra aumenta. Rejeita-se H_0 quando o valor calculado da estatística for superior ao valor crítico χ_α^2 para um nível de significância nominal pré-estabelecido α.

Sugere-se que classes com frequência esperada, E_i, menor ou igual a 5 sejam combinadas com classes adjacentes de forma que, após serem combinadas, tenham $E_i > 5$.

3 Aplicação do teste

Para se demonstrar a aplicação do teste serão considerados dados sobre o número de defeitos em placas de circuíto impresso. Existe uma forte sustentação teórica relacionada ao processo gerador dos dados que indica que a distribuição do número de defeitos seja Poisson sob certas circustâncias. Deseja-se testar a aderência da distribuição Poisson. A frequência absoluta observada de defeitos está na tabela abaixo onde o número de classes é $k = 4$.

Número de defeitos (x_i)	Frequência observada (O_i)
0	32
1	15
2	9
3	4

Sob a hipótese H_0 dos dados terem distribuição Poisson tem-se que calcular as frequências esperadas, E_i. No entanto, precisa-se estimar o parâmetro λ, com isso $p = 1$. A estimativa de λ é obtida por

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot O_i}{\sum_{i=1}^{k} O_i} = 0.75. \tag{2}$$

Assim, os valores esperados são calculados por meio da função de probabilidades da distribuição Poisson. Assim

$$\begin{aligned}
E_1 &= n \Pr(X = 0) = 60 \cdot \frac{\exp\{-0.75\}\, 0.75^0}{0!} = 28.32 \\
E_2 &= n \Pr(X = 1) = 60 \cdot \frac{\exp\{-0.75\}\, 0.75^1}{1!} = 21.24 \\
E_3 &= n \Pr(X = 2) = 60 \cdot \frac{\exp\{-0.75\}\, 0.75^2}{2!} = 7.98 \\
E_4 &= n \Pr(X \geq 3) = 60(1 - \Pr(0) - \Pr(1) - \Pr(2)) = 2.46
\end{aligned}$$

A figura 1 representa as frequências observadas e esperadas para o número de defeitos em placas de circuíto impresso.

Como o número esperado da quarta classe foi menor que 5, está será combinada com a terceira classe. Então temos a seguinte tabela com frequências observadas e esperadas.

x_i	O_i	E_i
0	32	28.32
1	15	21.24
2+	9	10.44

A estatística do teste é calculada por

$$X_0^2 = \frac{(32 - 28.32)^2}{28.32} + \cdots + \frac{(13 - 10.44)^2}{10.44} = 2.94. \tag{3}$$

O grau de liberdade é $k - 1 - p = 1$ e o valor correspondente para $\alpha = 0.05$ é $\chi_1^2 = 3.84$. Uma vez que $X_0^2 \leq \chi_1^2$ não rejeitamos H_0 de que a distribuição do número de defeitos em placas de circuíto impresso seja Poisson. A figura 2 ilustra a distribuição de referência com a posição do valor crítico e da estatística calculada do teste.

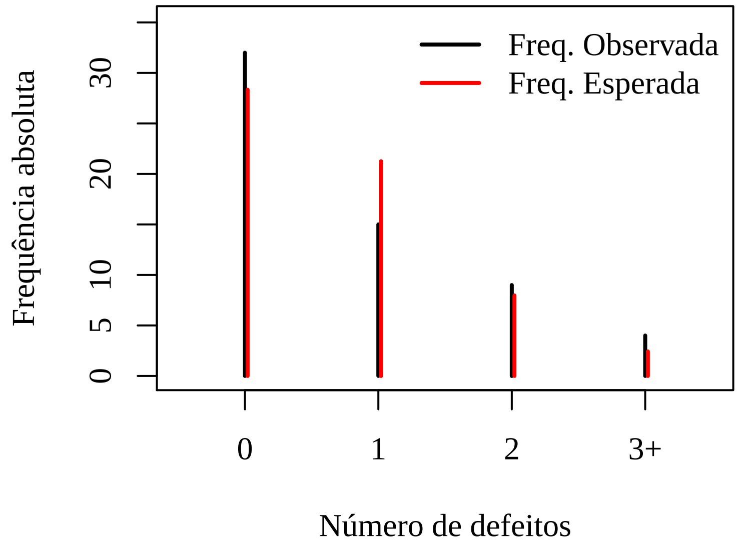

Figura 1: Frequências observadas e esperadas para o número de defeitos em placas de circuíto impresso.

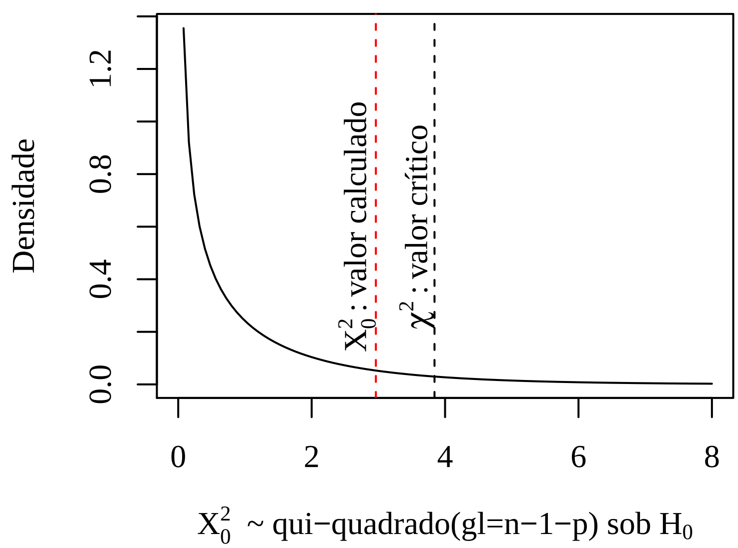

Figura 2: Função densidade da distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Linhas verticais representam o valor crítico e da estatística calculada do teste.

4 Sistematização do procedimento

A seguir a sequência de etapas de descreve de forma objetiva (ou procedural) a aplicação do teste χ^2 de aderência.

1. Defina um nível nominal de significância $0 < \alpha < 1$;
2. Defina uma distribuição de probabilidade em H_0 para X;
3. Observe uma amostra aleatória de tamanho n de X;
4. Classifique os valores observados em k classes e obtenha as frequências observadas O_i;
5. Sob H_0 obtenha as frequências esperadas E_i. Combine classes adjacentes de forma que $E_i > 5 \ \forall \ i$. Denote por p o número de parâmetros estimados para obter E_i.
6. Encontre o valor crítico, χ^2_α, correspondente à α na distribuição qui-quadrado com $k - 1 - p$ graus de liberdade;
7. Calcule a estística do teste
$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i};$$
8. Rejeite H_0 se $X_0^2 > \chi^2_\alpha$, caso contrário aceite.

5 Considerações finais

Para um bom desempenho do teste, ou seja, operar com o nível nominal de significância estabelecido, supoe-se que a amostra seja grande e que os valores esperados sejam maiores que 5. No R pode-se usar a função `chisq.test()` para aplicar esse teste.

Referências

[1] Montgomey, D. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 4 ed., LTC, 2007, 493 p.