CE 002 - Estatística I - Agronomia B (2012/1) www.leg.ufpr.br/ce002b
Prof. Walmes M. Zeviani - Departamento de Estatística - UFPR
Primeira avaliação (24/04/2012)
Acadêmico: grr:

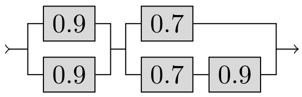
1. (1.0) Pega-se um baralho e coloca-se os quatro ases na mesa, virados para baixo. Dois deles (A♣, A♠) são pretos, os outros dois (A♡, A♢) são vermelhos. Seja o experimento retirar duas dessas quatro cartas aleatoriamente. Qual a probabilidade das cartas serem [da mesma cor][de cor diferente]?

Podemos pensar de duas formas. A primeira é a seguinte: a primeira carta sorteda pode ser de qualquer cor, resta 1 carta de mesma cor e 2 cartas de cor diferente, portanto as probabilidades são [1/3][2/3]. A segunda forma é escrever o espaço amostral

(A♣, A♠)	(A♣, A♢)	(A♠, A♢)
(A♣, A♡)	(A♠, A♡)	(A♡, A♢)

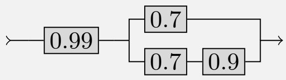
e verificar que 2/6 são cartas de mesma cor e o complementar, 4/6, são cartas de cor diferente.

2. (1.5) O circuito elétrico mostrado a seguir opera somente se houver um caminho de dispositivos funcionais, da esquerda para a direita. A probabilidade de cada dispositivo funcionar é mostrada na figura. Suponha que os dispositivos falhem independentemente. Qual é a probabilidade do circuito operar?



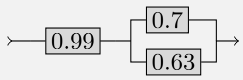
Abaixo os cálculos para o primeiro conjunto de valores. Vamos chamar os dispositivos de A a E lendo de cima para baixo e da esquerda para direita. O procedimento consiste em resolver, por etapa, cada nó do circuito, reduzindo os dispositivos a um, passo a passo. Os dois da esqueda estão em paralelo e para o sistema funcionar **pelo menos um** deles deve funcionar, cuja probabilidade é

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.9 + 0.9 - 0.9 \times 0.9 = 0.99 = P(F).$$



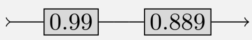
Agora vamos resolver os resistores em série onde **ambos** devem funcionar para funcionar o circuito, assim

$$P(D \cap E) = P(D) \times P(E) = 0.7 \times 0.9 = 0.63 = P(G).$$



Mais uma vez resolvemos o circuito em paralelo

$$P(C \cup G) = P(C) + P(G) - P(C \cap G) = 0.7 + 0.63 - 0.7 \times 0.63 = 0.889 = P(H).$$



Por fim resolvermos o circuito em série de onde obtemos

$$P(F \cap H) = P(F) \times P(H) = 0.99 \times 0.889 = 0.88011 = P(I),$$

que é probabilidade do circuito funcionar. Para os possiveis enunciados as respostas de cada etapa estão na tabela abaixo.

	$P(A)$	$P(B)$	$P(C)$	$P(D)$	$P(E)$	$P(F)$	$P(G)$	$P(H)$	$P(I)$
1	0.9	0.9	0.7	0.7	0.9	0.990	0.630	0.889	0.880
2	0.8	0.9	0.8	0.9	0.8	0.980	0.720	0.944	0.925
3	0.9	0.8	0.7	0.6	0.8	0.980	0.480	0.844	0.827

3. (1.5) Em uma empresa agrícola de produção de sementes, uma máquina composta de 2 peneiras é usada para classificar sementes de acordo com diâmetro em 3 categorias. A maior peneira retém sementes maiores que 8.8 mm, a outra retém as maiores que 7.5 mm. Se o diâmetro das sementes têm distribuição normal com média 8.1 mm e desvio-padrão 2 mm, qual a proporção de sementes em cada categoria de diâmetro?

A solução é baseada em encontrar o valor de z e consultar a tabela da normal padrão de forma apropriada. O valor de z é obtido por

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Abaixo a tabela com os valores para cada enunciado possível.

	x_1	x_2	μ	σ	z_1	z_2	$P(Z < z_1)$	$P(z_1 < Z < z_2)$	$P(Z > z_2)$
1	7.5	8.8	8.1	2	-0.300	0.350	0.3821	0.2547	0.3632
2	7.8	9.2	8.2	2	-0.200	0.500	0.4207	0.2707	0.3085
3	7.3	9.0	8.0	2	-0.350	0.500	0.3632	0.3283	0.3085

---

4. (1.5) Para monitorar o grau de molhamento de uma aplicação foliar de fungicida (pulverização) em uma cultura, são distribuídas lâminas de papel hidrosolúvel à 10 cm do solo. Após aplicação o número de gotículas por lâmina é um indicador da intensidade de molhamento. Suponha que o número de gotículas por lâmina tenha distribuição de Poisson com média de 47 gotículas por lâmina. Aproxime a distribuição de Poisson pela Normal.

a) Calcule a probabilidade de uma lâmina ter de 38 à 55 gotas;
b) Determine os limites do intervalo, simétrico à média, tal que a probabilidade de contagens nesse intervalo seja o mais próximo, mas não menor que 90%.

Dados os valores de x_e e x_d deve obter os valores z_e e z_d pela expressão $z = (x - \mu)/\sigma$. Na Poisson $\mu = \sigma^2$ (média = variância), então a expressão fica, empregando a correção de continuidade, $z = (x \pm 0.5 - \mu)/\sqrt{\mu}$. Após obter os valores z_e e z_d faz se a consulta na tabela da normal padrão para obter o valor de $P(z_e < Z < z_d)$. Para obter o intervalo consultamos a tabela da normal padrão para obter o valor de z que satisfaz $P(-z < Z < z) = 0.9$, tal valor é 1.64. Aplicamos a tranformação inversa da padronização em z para obtermos os valores de x, $x = \sigma z + \mu$ e depois truncamos para o inteiro abaixo do menor valor (li) e para o inteiro acima do maior valor (ls), assim li e ls são o intervalo que confere cobertura maior ou igual à 90%. Os resultados dessas etapas estão resumidos na tabela abaixo.

	μ	x_e	x_d	z_e	z_d	$P(x_e < Z < z_d)$	li	ls
1	47	38	55	-1.39	1.24	0.810	35	59
2	45	38	53	-1.12	1.27	0.766	33	57
3	49	38	57	-1.64	1.21	0.837	37	61

---

5. (2.5) Uma máquina caça níquel possui 2 roletas e em cada uma delas está gravada a sequência de números |0|0|1|2|. A máquina premia o jogador com o valor da soma dos números observados, ou seja, se sair | 1 | 0 | o jogador ganha 1 dólar. O valor de cada jogada é 2 dólares. Seja X o **lucro** do jogador em cada jogada. Determine:

a) A distribuição de probabilidades de X;
b) O lucro médio do jogador, ou seja, o valor esperado de X.

Vamos montar uma tabela com todas as combinações de resultados indivíduais das roletas, onde nas linhas estão os resultados e suas probabilidades para primeira roleta e na coluna para a segunda. Os valores em cada cédula representam o valor da v.a. X, que é o lucro da jogada, ou seja, o que a máquina premia menos o que é investido. Os valores entre parêntese são as probabilidades para cada evento, obtidos pelo produto dos eventos indivíduais.

	0 (1/2)	1 (1/4)	2 (1/4)
0 (1/2)	-2 (1/4)	-1 (1/8)	0 (1/8)
1 (1/4)	-1 (1/8)	0 (1/16)	1 (1/16)
2 (1/4)	0 (1/8)	1 (1/16)	2 (1/16)

	0 (1/2)	1 (1/4)	3 (1/4)
0 (1/2)	-2.5 (1/4)	-1.5 (1/8)	0.5 (1/8)
1 (1/4)	-1.5 (1/8)	-0.5 (1/16)	1.5 (1/16)
3 (1/4)	0.5 (1/8)	1.5 (1/16)	3.5 (1/16)

Com essa tabela passamos para outra tabela que é a de distribuição de probabilidades somando as probabilidades para valores iguais de x.

x	$P(x)$
-2	0.2500
-1	0.2500
0	0.3125
1	0.1250
2	0.0625
μ	-0.5000

x	$P(x)$
-2.5	0.2500
-1.5	0.2500
0.5	0.0625
-0.5	0.2500
1.5	0.1250
3.5	0.0625
μ	-0.6875

Com os valores dessa tabela aplicamos a expressão para obter a média da distribuição

$$E(X) = \mu = \sum_{\forall\, x} x \cdot P(x) = -0.5,$$

portanto o lucro médio do jogador é -0.5, ou seja, é um prejuízo.

---

6. (2.0) Suponha que esteja disponível duas marcas de semente de alface cujo preço e manejo são descritos na tabela abaixo:

	custo unitário da semente (R$)	taxa de germinação	sementes por cova
semente A	0.010	0.90	2
semente B	0.005	0.45	4

Pela tabela temos que a semente A custa 0.01, têm germinação de 0.9 e deve-se semear 2 sementes por cova. Considerando que o objetivo é ter uma única plântula por cova (faz se o desbaste do excedente) use seus conhecimentos de probabilidade para decidir qual a semente que deve ser adquirida visando melhor custo-benefício. Para isso, considere as seguintes etapas:

a) Calcular a probabilidade de não germinar nenhuma semente em uma cova;
b) Calcular o número covas semeadas com R$ 1 de semente;
c) Calcular o número esperado de covas viáveis com esse investimento.

Seja cus o custo unitário da semente, pg a probabilidade de germinação e nsc o número de sementes por cova. A probabilidade de nenhuma semente germinar em uma cova, ou seja, o número de sementes germinadas por cova (v.a. X) ser 0 é calculado por

$$P(X = 0) = (1 - pg)^{nsc}.$$

O número de covas semeadas (ncs) com R$ 1 é calculado por

$$ncs = \frac{1}{cus \times nsc}.$$

O número esperado de covas viáveis (aquelas que apresentam mais de uma plântula, $necv$) nada mais é que a média ou valor esperado, pois se semeamos ncs covas e $1 - P(X = 0)$ dão mais de uma semente, o valor esperado é calculado por

$$necv = ncs \times (1 - P(X = 0)).$$

De fato, o número de covas viáveis em relação ao um número de covas semeadas é uma v.a. de distribuição binomial. Os resultados estão organizados nas tabelas abaixo. A semente que deve ser escolhida visando melhor custo beneficio é aquela que apresenta maior $necv$.

	cus	pg	nsc	$P(X = 0)$	ncs	$necv$
semente A	0.010	0.90	2	0.010	50.000	49.500
semente B	0.005	0.45	4	0.092	50.000	45.425

	cus	pg	nsc	$P(X = 0)$	ncs	$necv$
semente A	0.010	0.80	2	0.040	50.000	48.000
semente B	0.003	0.45	4	0.092	83.333	75.708
