CE 002 - Estatística I

Agronomia - Turma B

Professor Walmes Marques Zeviani

Laboratório de Estatística e Geoinformação
Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

1º semestre de 2012

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Sumário

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Definição de variável aleatória

Variável aleatória (v.a.)

Uma **variável aleatória** é uma função que confere um número real a cada resultado no espaço amostral de um experimento aleatório.

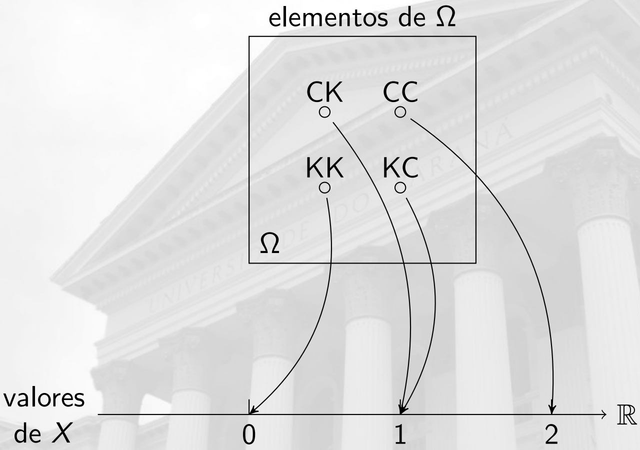
Notação

Uma variável aleatória é denotada por uma letra maiúscula, tal como X. Depois do experimento ser conduzido, o valor medido/observado da v.a. é denotado por uma letra minúscula, tal como $x = 70$ gramas.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

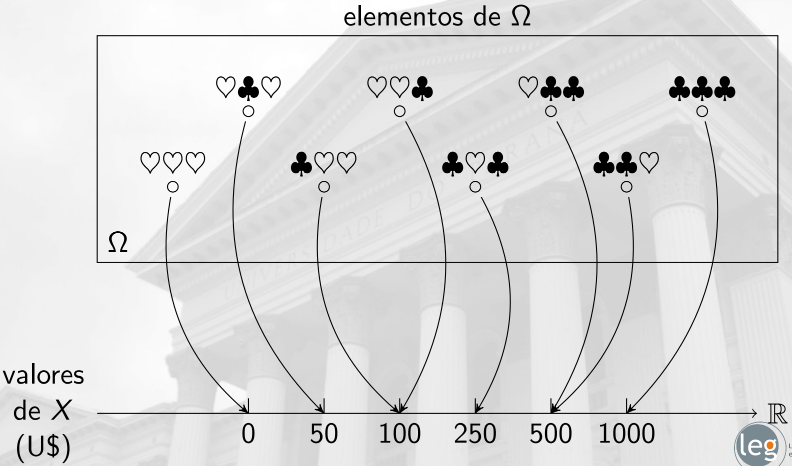
Lançamento de duas moedas

Experimento: lanças 2 moedas, v.a. X: número de resultados cara;



Jogo de caça-níquel

Experimento: girar os cilindros (3 cilindros de 4 cédulas com 3♡ e 1♣ em cada); v.a. X: prêmio do resultado (U$);



Tipos de variáveis aleatórias

Discretas

Uma v.a. **discreta** apresenta um conjunto contável (finito ou infinito) de valores que pode assumir. Ex: número de caras ao lançar 3 moedas, prêmio de uma máquina caça-níquel, número de votos recebidos, aprovação no vestibular, número de leitões por gestação, número de acidentes de trânsito por ano, número de acesso diário ao bebedouro, grau de uma multa de trânsito, grau de uma queimadura na pele.

Contínuas

Uma v.a. **contínua** apresenta um conjunto infinito de valores que pode assumir dentro de um intervalo limitado ou aberto. Ex: peso de um fruto, teor de açucar da cana-de-açúcar, área foliar coberta por fungo, pH do solo, precipitação diária, concentração de uma substância, diâmetro do colmo, pureza de um metal, tempo para conclusão de uma tarefa, instante de chegada de um e-mail, retorno financeiro de um investimento.

Distribuição de probabilidades

A **distribuição de probabilidades** de uma v.a. X é uma descrição das probabilidades associadas com os possíveis valores de X. Os valores que X compoem o que se chama de **suporte** da v.a.. Para uma v.a. discreta, a distribuição é frequentemente especificada por apenas uma lista de valores possíveis, juntamente com a probabilidade de cada um. Em alguns casos, é conveniente/possível expressar a probabilidade em termos de uma fórmula (modelo).

Jogo de caça-níquel

Distribuição de probabilidades

X: prêmio pago pela máquina em uma jogada.

ω	x	$P(\omega)$	$P(X = x)$
♣♣♣	1000	$(1/4)^3$	$1/64$
♣♣♡, ♡♣♣	500	$2 \cdot (1/4 \cdot 1/4 \cdot 3/4)$	$6/64$
♣♡♣	250	$1/4 \cdot 1/4 \cdot 3/4$	$3/64$
♡♡♣, ♣♡♡	100	$2 \cdot (1/4 \cdot 3/4 \cdot 3/4)$	$18/64$
♡♣♡	50	$1/4 \cdot 3/4 \cdot 3/4$	$9/64$
♡♡♡	0	$(3/4)^3$	$27/64$

Os valores da coluna x e $P(X = x)$ representam a distribuição de probabilidades da v.a. X pois associam uma probabilidade a cada valor que X assume.

Propriedades de uma distribuição de probabilidades

- ser positiva para todos os valores de X:

$$0 \leq P(X = x) \leq 1, \forall\ x;$$

- a soma das probabilidades deve ser 1:

$$\sum_{\forall x} P(X = x) = 1.$$

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Gráfico de uma distribuição de probabilidades

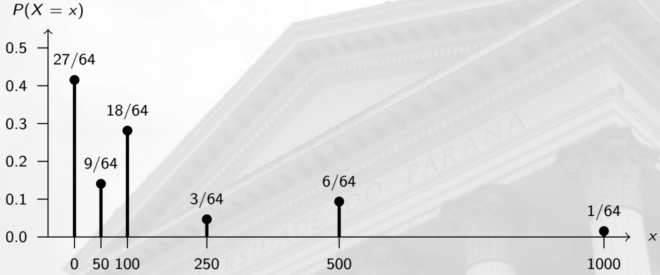


Figura 1: Probabilidades em função dos valores que a v.a. X (prêmio pago pela máquina em uma jogada) assume.

Distribuição de probabilidades acumulada

É um método alternativo de descrever a distribuição de probabilidades de uma v.a.. A função de distribuição acumulada de uma v.a. discreta X, denotada por $F(x)$, é

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\forall x_i \leq x} P(X = x). \tag{1}$$

$F(x)$ satisfaz as seguintes propriedades:

- tem imagem no intervalo [0,1] e domínio no $\mathbb{R}$:

$$0 \leq F(x) \leq 1, \, \forall \, x \in \mathbb{R};$$

- é não decrescente:

$$\text{se } x_1 < x_2, \text{ então } F(x_1) \leq F(x_2).$$

Gráfico de uma d.p. acumulada

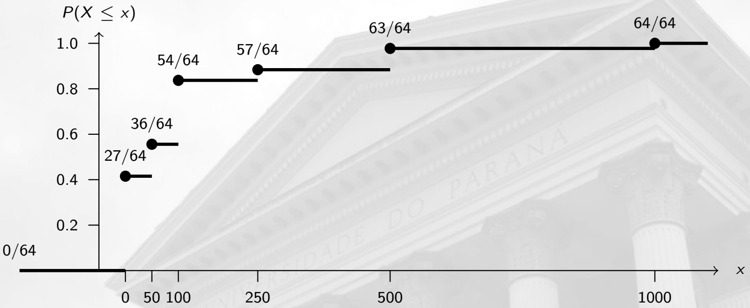


Figura 2: Probabilidades acumuladas em função dos valores que a v.a. X (prêmio pago pela máquina em uma jogada) assume.

Valor esperado de uma v.a. discreta

O valor esperado de uma v.a. é uma medida do centro da distribuição de probabilidades. Ela representa o valor médio da v.a. quando ela é observada infinitamente, por isso chamado de média da v.a.. A **média** ou **valor esperado** de uma v.a. discreta X, denotado como μ ou $E(X)$, é

$$\mu = E(X) = \sum_{\forall x} x \cdot P(X = x). \tag{2}$$

A $E(X)$ é, portanto, a média ponderada dos valores que X assume, com os pesos iguais às probabilidades.

Valor esperado de uma v.a. discreta

Valor esperado do prêmio por jogada do caça-níquel

$$
\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \sum_{\forall x} x \cdot P(X = x) \\
&= 0 \cdot (27/64) + 50 \cdot (9/64) + 100 \cdot (18/64) \\
&+ 250 \cdot (3/64) + 500 \cdot (6/64) + 1000 \cdot (1/64) \\
&= 109.37
\end{aligned}
$$

Isso significa que se jogarmos nesse caça-níquel infinitamente, na média de todas as jogadas, o valor recebido como prêmio será igual a 109.37.

Interpretação geométrica do valor esperado

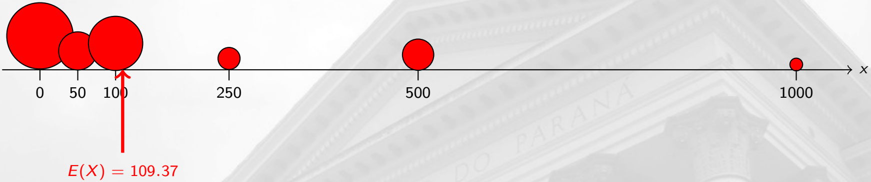


Figura 3: Interpretação geométrica do valor esperado que representa o ponto de equilíbrio (centro) da distribuição de probabilidades.

Variância de uma v.a. discreta

A variância de uma v.a. representa a dispersão da distribuição de probabilidades. Ela mede o quando as probabilidades estão próximas, ou concentradas, ao redor do valor central (μ). Representamos a variância de uma v.a. por σ^2 ou $V(X)$, onde

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_{\forall x}(x-\mu)^2 \cdot P(x) = \sum_{\forall x} x^2 \cdot P(x) - \mu^2. \quad (3)$$

O desvio-padrão de X é $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Variância de uma v.a. discreta

Variância do prêmio por jogada do caça-níquel

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 = V(X) &= \sum_{\forall x} (x-\mu)^2 \cdot P(X=x) \\
&= (0-109.37)^2 \cdot (27/64) + (50-109.37)^2 \cdot (9/64) \\
&+ (100-109.37)^2 \cdot (18/64) + \cdots + (1000-109.37)^2 \cdot (1/64) \\
&= 1122714.99
\end{aligned}
$$

O desvio-padrão é $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1059.58$

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Exemplo

Mensagens

O número de mensagens enviadas por hora, atráves de uma rede de computadores, é uma v.a. discreta e tem a seguinte distribuição de probabilidades

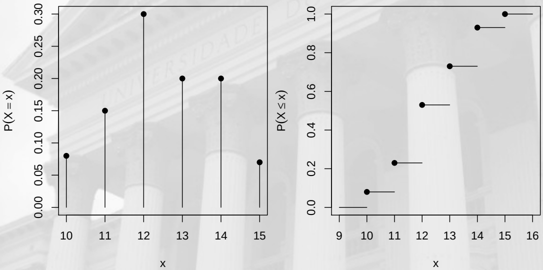
x = número de mensagens	10	11	12	13	14	15
$P(X = x)$	0.08	0.15	0.30	0.20	0.20	0.07

Faça o gráfico da distribuição de probabilidades, da distribuição de probabilidades acumulada, determine a média e o desvio-padrão do número de mensagens enviadas por hora.

Exemplo

x	$P(X=x)$	$P(X \leq x)$	$x \cdot P(x)$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2 \cdot P(x)$
10	0.08	0.08	0.80	6.25	0.50
11	0.15	0.23	1.65	2.25	0.34
12	0.30	0.53	3.60	0.25	0.07
13	0.20	0.73	2.60	0.25	0.05
14	0.20	0.93	2.80	2.25	0.45
15	0.07	1.00	1.05	6.25	0.44
soma			12.50		1.85

$\mu = 12.50$, $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.85} = 1.36$.



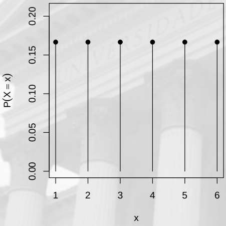
Distribuição Uniforme Discreta

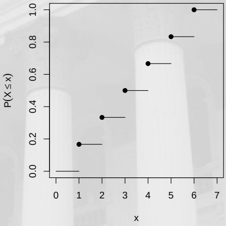
Distribuição Uniforme Discreta

Uma v.a. X tem distribuição uniforme discreta se cada um dos n valores em seu suporte, isto é, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tiver igual probabilidade. Então

$$P(X = x) = p(x) = 1/n. \tag{4}$$

São casos dessa distribuição o resultado do lançamento um dado justo, o sorteio de um número no bingo, na loteria, etc. Representamos $X \sim UD(n)$.





Distribuição Bernoulli

Distribuição Bernoulli

Uma v.a. X tem distribuição Bernoulli se apresenta dois restultados possíveis, chamados frequentemente de **sucesso** (ou 1) e **fracasso** (ou 0). A probabilidade de sucesso é representada pelo parâmetro p, e a do fracasso é $1 - p$. Então

$$P(X = x) = p(x) \begin{cases} p & \text{, se } x = 1 \\ 1 - p & \text{, se } x = 0. \end{cases} \tag{5}$$

O parâmetro p têm o seguinte espaço paramétrico $\Theta = \{p : 0 < p < 1\}$. São casos dessa distribuição o resultado do lançamento de uma moeda, o sexo de um bebê, o voto a proposta, o resultado de um teste de germinação, etc. Representamos $X \sim Ber(p)$ e temos que

- valor esperado: $\mu = E(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot (p) = p$
- variância: $\sigma^2 = V(X) = 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot (p) - p^2 = p(1 - p)$.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Distribuição Binomial

Distribuição Binomial

Uma v.a. X tem distribuição Binomial se é o **número de sucessos** obtido em n provas de Bernoulli se

- as tentativas forem independentes
- a probabilidade de sucesso (p) permanecer constante em todas as tentativas.

Assim X tem distribuição binomial com parâmetros n e p, $\Theta = \{0 < p < 1, n \in \mathbb{N}_*^+\}$. O suporte é o conjunto 0, 1, 2, ..., n. Representamos por $X \sim Bin(n,p)$ e a função de probabilidade de X é

$$P(X = x) = p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}. \qquad (6)$$

- valor esperado: $\mu = E(X) = n \cdot p$
- variância: $\sigma^2 = V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$.

Distribuição Geométrica

Distribuição Geométrica

Uma v.a. X tem distribuição Geométrica se é o **número tentativas** até que o **primeiro sucesso** seja obtido em uma série de provas independentes de Bernoulli (p constante). Assim

$$P(X = x) = p(x) = (1 - p)^{x-1} \cdot p. \tag{7}$$

X tem distribuição geométrica com parâmetro p, $\Theta = \{0 < p < 1\}$. O suporte é o conjunto 0, 1, 2, ... Representamos por $X \sim Geo(p)$ onde

- valor esperado: $\mu = E(X) = 1/p$
- variância: $\sigma^2 = V(X) = (1 - p)/p^2$.

Distribuição Binomial Negativa

Distribuição Binomial Negativa

Uma v.a. X tem distribuição Binomial Negativa se é o **número tentativas** até que r **sucessos** sejam obtidos em uma série de provas independentes de Bernoulli (p constante). Assim

$$P(X = x) = p(x) = \binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^r. \tag{8}$$

X tem distribuição binomial negativa com parâmetros p e r, $\Theta = \{0 < p < 1, r \in \mathbb{N}_*^+\}$. O suporte é o conjunto r, $r+1$, $r+2$, ... Representamos por $X \sim BN(p,r)$ onde

- valor esperado: $\mu = E(X) = r/p$
- variância: $\sigma^2 = V(X) = r(1-p)/p^2$.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Distribuição Hipergeométrica

Distribuição Hipergeométrica

Uma v.a. X tem distribuição Hipergeométrica se é o **número sucessos** obtidos em uma amostra de n elementos sem reposição de uma população com N elementos sendo que K deles são classificados como sucesso e $N-K$ como fracasso. Assim

$$P(X = x) = p(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \cdot x. \tag{9}$$

X tem distribuição hipergeométrica com parâmetros n, N e K, $\Theta = \{N \in \mathbb{N}_*^+, n \in \mathbb{N}_*^+ < N, K \in \mathbb{N}_*^+ < N\}$. O suporte é o conjunto dos números inteiros entre $\max\{0,n-(N-K)\},\ldots,\min\{K,n\}$. Representamos por $X \sim Hiper(n,N,K)$ onde

- valor esperado: $\mu = E(X) = nK/N$
- variância: $\sigma^2 = V(X) = \frac{K(N-K)n(N-n)}{N^2(N-1}$.

Distribuição de Poisson

Distribuição de Poisson

Uma v.a. X tem distribuição de Poisson se é o **número de eventos** ocorridos em um intervalo de forma que

- o intervalo possa ser subdividido em subintervalos suficientemente pequenos
- a probabilidade de 2 eventos no mesmo subintervalo seja zero
- a probabilidade de 1 evento seja a mesma em qualquer subintervalo e proporcional ao comprimento desse subintervalo
- os eventos sejam independentes dos ocorridos em outros subintervalos.

Assim

$$P(X = x) = p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}. \tag{10}$$

X tem distribuição de Poisson com parâmetro λ, $\Theta = \{\lambda > 0\}$. O suporte é o conjunto dos números inteiros positivos. Representamos por $X \sim Poi(\lambda)$ onde

- valor esperado: $\mu = E(X) = \lambda$
- variância: $\sigma^2 = V(X) = \lambda$.