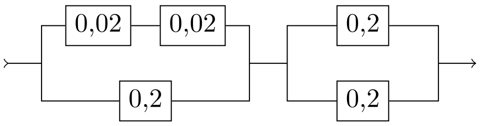
Primeira avaliação - Probabilidade e variáveis aleatórias

Estatística I - Agronomia (2011) (13 de outubro de 2011)

Prof. Walmes M. Zeviani & Fernanda B. Rizzato - Departamento de Estatística - UFPR

Acadêmico: Gabarito da Prova Tirei Dez Turma: A e B

1. Considere que os dispositivos do circuito abaixo falhem independentemente com a probabilidade descrita. Qual será a probabilidade do circuito operar?



fl = falhar, fc = funcionar,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P(cir\ fc)} &= 1 - \mathrm{P(cir\ fl)} = 1 - \mathrm{P(esq\ fl)} \times \mathrm{P(dir\ fl)}\\
\mathrm{P(esq\ sup\ fl)} &= 1 - (1 - 0.02)^2 = 1 - 0.9604 = 0.0396\\
\mathrm{P(esq\ fc)} &= 1 - \mathrm{P(esq\ fl)} = 1 - 0.0396 \times 0.2 = 0.99208\\
\mathrm{P(dir\ fc)} &= 1 - \mathrm{P(dir\ fl)} = 1 - 0.2^2 = 0.96\\
\mathrm{P(cir\ fc)} &= 0.99208 \times 0.96 = 0.9524
\end{aligned}$$

2. Uma clinica envia amostras de equinos para 3 laboratórios de análises A, B e C nas seguintes proporções 0,25; 0,3 e 0,45, respectivamente. A probabilidade de cada um dos laboratórios elaborar uma análise errada é de respectivamente 1/2, 1/3 e 1/6.

a) Uma análise resultou errada, qual a probabilidade de ter sido feita pelo laboratório A?
b) Qual a probabilidade de um exame executado não apresentar erro?

E: análise errada, A: laboratório A;
a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A|E) &= \frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\sum_i \mathrm{P}(L_i \cap E)}\\
&= \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)}{\sum_i \mathrm{P}(L_i)\mathrm{P}(E|L_i)} = \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)}{\mathrm{P}(E)}\\
\mathrm{P}(E) &= 0.25 * 0.5 + 0.3 * 0.333 + 0.45 * 0.167 = 0.3\\
\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(A\cap E) &= 0.25 * 0.5 = 0.125\\
\mathrm{P}(A|E) &= \frac{0.125}{0.3} = 0.4167
\end{aligned}$$

b)

$$\mathrm{P}(E^c) = 1 - \mathrm{P}(E) = 1 - 0.3 = 0.7$$

3. Um caça-níquel tem 2 discos que funcionam independentemente um do outro. Cada disco tem 10 figuras: 4 milhos, 3 beterrabas, 2 feijões e 1 cenoura. Uma pessoa paga R$ 10,00 e aciona a máquina. Se aparecem 2 milhos, ganha R$ 5,00; se aparecem 2 beterrabas, ganha R$ 10,00; se aparecem 2 feijões, ganha R$ 15,00 e se aparecem 2 cenouras, ganha R$ 20,00. Seja X a variável aleatória que representa o **lucro** do jogador em cada jogada.

a) complete a distribuição de probabilidades de X na tabela abaixo:

x	-10	-5	0	5	x_5
$p(x)$	0.7	0.16	$p(x_3)$	$p(x_4)$	0.01

b) determine a $\mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{V}(X)$;
c) faça o esboço o gráfico da distribuição acumulada de X;

M: milho, B: beterraba, F: feijão, C: cenoura;
a)

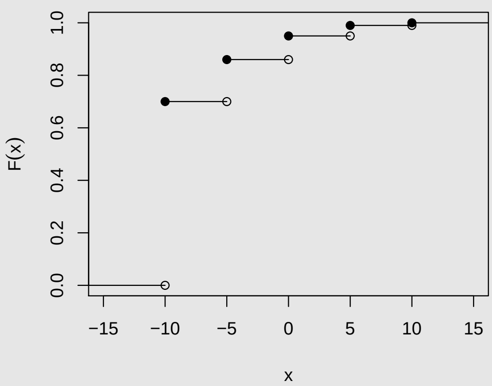
$$x_5 \text{ lucro para o resultado } CC = \text{R\$ } 10{,}00$$

$$\begin{aligned}
p(x_3) &= \mathrm{P}(B\cap B) = \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}(B) = 0.3^2 = 0.09\\
p(x_4) &= \mathrm{P}(F\cap F) = \mathrm{P}(F) \times \mathrm{P}(F) = 0.2^2 = 0.04
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{\forall x} x \cdot p(x) = -10 \cdot 0.7 + \cdots + 10 \cdot 0.01 = -7.5\\
\mathrm{V}(X) &= \sum_{\forall x} (x - \mathrm{E}(X))^2 \cdot p(x)\\
&= (-10 + 7.5)^2 \cdot 0.7 + \cdots + (10 + 7.5)^2 \cdot 0.01 = 19.75
\end{aligned}$$

c)



4. Em indivíduos sadios, o consumo renal de oxigênio tem distribuição normal de média 12 cm^3/min e desvio padrão 1,5 cm^3/min.

a) determinar a proporção de indivíduos sadios com consumo: inferior a 10 cm^3/min; superior a 8 cm^3/min; entre 9,4 e 13,2 cm^3/min; igual a 11,6 cm^3/min;
b) determinar o valor do consumo renal que é superado por 98,5% dos indivíduos sadios;
c) determinar uma faixa simétrica em torno do valor médio que contenha 90% dos valores do consumo renal.

a)
Cálculo dos valores padronizador de x por $z = (x - \mu)/\sigma$, sendo $\mu = 12$ e $\sigma = 1.5$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X < 10) &= \mathrm{P}(Z < -1.3333) = 0.0912 \\ \mathrm{P}(X > 8) &= \mathrm{P}(Z < -2.6667) = 0.9962 \\ \mathrm{P}(9.4 < X < 13.2) &= \mathrm{P}(-1.7333 < Z < 0.8) = 0.7466 \\ \mathrm{P}(X = 11.6) &= \text{zero} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > x) = \mathrm{P}(Z > z) &= 0.985 \\ z &= -2.1701 \\ x &= z \cdot \sigma + \mu = -2.1701 \cdot 1.5 + 12 = 8.7449 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mu - x < X < \mu + x) = \mathrm{P}(-z < Z < z) &= 0.9 \\ z &= -1.6449, 1.6449 \\ x &= z \cdot \sigma + \mu = 9.5327, 14.4673 \end{aligned}$$

---

5. Um teste de múltipla escolha contém 6 questões, cada uma com 4 alternativas sendo apenas uma correta. Suponha que o estudante apenas tente adivinhar ("chutar") em cada questão.

a) qual a probabilidade do estudante acertar todas as questões?
b) qual a probabilidade do estudante acertar mais da metade das questões?

a)

$$\begin{aligned} &X \sim \text{Binomial}(n = 6, p = 1/4) \\ &\mathrm{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &\mathrm{P}(X = 6) = \binom{6}{6} 0.25^6 (1 - 0.25)^{6-6} = 0.000244 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > 3) &= \mathrm{P}(X = 4) + \mathrm{P}(X = 5) + \mathrm{P}(X = 6) \\ &= 0.032959 + 0.004395 + 0.000244 = 0.0376 \end{aligned}$$

Expressões úteis

$$\boxed{\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)}, \quad \boxed{\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}}, \quad \boxed{\mathrm{P}(B_j|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B_j)\mathrm{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|B_i)\mathrm{P}(B_i)}},$$

$$\boxed{E(X) = \sum_{\forall x} x\, p(x) = \int_{\forall x} x\, f(x)\, dx}, \quad \boxed{V(X) = \sum_{\forall x} (x - E(X))^2\, p(x) = \int_{\forall x} (x - E(X))^2\, f(x)\, dx},$$

$$\boxed{\mathrm{P}(X = x) = \frac{\lambda^x \mathrm{e}^{-\lambda}}{x!}}, \quad \boxed{\mathrm{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x\, (1-p)^{n-x}}, \quad \boxed{\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}}, \quad \boxed{E(X) = np}, \quad \boxed{V(X) = np(1-p)},$$

$$\boxed{z = \frac{x - \mu}{\sigma}}, \quad \boxed{F(x) = \mathrm{P}(X \le x) = \sum_{\forall u \le x} u\, p(u) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du}, \quad \boxed{f(x) = \frac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-x/\lambda}}, \quad \boxed{F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x/\lambda}}.$$
