

Métodos baseados no aceitação e rejeição

Amostrador independente e Metropolis Random Walk

Prof. Walmes Zeviani
walmes@ufpr.br

Laboratório de Estatística e Geoinformação
Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Atualizado em 2018-08-27

Justificativas

- ▶ O método da aceitação e rejeição é útil, porém tem limitações.
- ▶ Métodos baseados nele foram propostos e são utilizados em vários contextos, principalmente em inferência bayesiana.

Objetivos

- ▶ Apresentar o método do amostrador independente.
- ▶ Apresentar o método do Metropolis Random Walk.

O amostrador independente

Objetivo: gerar números de uma v.a. X a partir de valores de uma v.a. candidata Y .

1. Escolher uma v.a. Y para gerar valores candidatos para a v.a. alvo X . O suporte de Y deve conter o de X . Tem-se que ter um GNA para Y . A função de densidade de ambas, $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ deve ser computável para todo x .
2. Fornecer um valor inicial $x_0 = y_0$.
3. Criar a variável contadora $i = 1$.

O amostrador independente

4. Gerar um valor y_i com o GNA da v.a. Y .
5. Gerar um número uniforme u vindo da $U(0, 1)$.
6. Calcular a probabilidade de aceitação

$$r = \frac{\frac{f_X(y_i)}{f_X(x_{i-1})}}{\frac{f_Y(y_i)}{f_Y(x_{i-1})}} = \frac{f_X(y_i)}{f_X(x_{i-1})} \frac{f_Y(x_{i-1})}{f_Y(y_i)} = \frac{f_X(y_i)}{f_Y(y_i)} \frac{f_Y(x_{i-1})}{f_X(x_{i-1})}. \quad (1)$$

7. Se $u < r$, fazer $x_i = y_i$, caso contrário, fazer $x_i = x_{i-1}$.
8. Incrementar i em uma unidade.
9. Repetir de 4–8 até atingir o número desejado de valores de X .

Código exemplo: <http://leg.ufpr.br/~walmes/ensino/ce089-2014-02/ce089-2014-02-aula06.html>.

Aspectos importantes

- ▶ A cadeia de números aleatórios irá apresentar valores repetidos.
- ▶ Um número grande n de valores de X deve ser gerado para que a distribuição seja apropriadamente representada (convergência da cadeia).
- ▶ Pode-se, ao final, reamostrar um número $m < n$ de valores para ter uma amostra independente.
- ▶ Tal amostragem pode ser sistemática, pegando um elemento a cada k consecutivos (raleamento).

O Metropolis Random Walk

Objetivo: gerar números de uma v.a. X a partir de valores de uma v.a. candidada Y .

1. Escolher uma v.a. Y para gerar valores candidatos para a v.a. alvo X . O suporte de Y deve ser da mesma natureza que X . Tem-se que ter um GNA para Y . A função de densidade de ambas, $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ deve ser computável para todo x .
2. A v.a. Y deve ter uma **função de densidade simétrica**.
3. Fornecer um valor inicial $x_0 = y_0$.
4. Criar a variável contadora $i = 1$.

O Metropolis Random Walk

5. Gerar um valor y_i com o GNA da v.a. condicional Y , ou seja, $f_Y(y|x_{i-1})$.
6. Gerar um número uniforme u vindo da $U(0, 1)$.
7. Calcular a probabilidade de aceitação

$$r = \frac{f_X(y_i)}{f_X(x_{i-1})}. \quad (2)$$

8. Se $u < r$, fazer $x_i = y_i$, caso contrário, fazer $x_i = x_{i-1}$.
9. Incrementar i em uma unidade.
10. Repetir de 4–9 até atingir o número desejado de valores de X .

Código exemplo: <http://leg.ufpr.br/~walmes/ensino/ce089-2014-02/ce089-2014-02-aula06.html>.

Aspectos importantes

- ▶ Valem as mesmas considerações do amostrador independente.
- ▶ Se a função de densidade da v.a. candidata não for simétrica, uma modificação do cálculo da probabilidade de aceitação deve ser feito.
- ▶ Isso leva ao algoritmo de Metropolis-Hastings (mais geral).



Próxima aula

- ▶ Casos especiais de GNA de números aleatórios.
- ▶ GNA para a distribuição Normal.

Avisos

- ▶ Sabatina estará disponível de Qui 12h00 ao Sáb 23h59.