Amostragem de aceitação para atributos

CE219 - Controle Estatístico de Qualidade

Prof. Cesar Taconeli
taconeli@ufpr.br

Prof. Walmes Zeviani
walmes@ufpr.br

Laboratório de Estatística e Geoinformação
Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

22 de maio, 2019

Introdução

"Garbage in, garbage out."

– George Fuechsel

Introdução

- A **amostragem de aceitação** contempla planos de amostragem aplicados a lotes (de insumos, matéria prima, produtos acabados, etc.).
- Em muitas situações, a inspeção de 100% dos itens de um lote é **inviável**, por motivos operacionais e/ou financeiros.
- O objetivo principal da amostragem de aceitação é a **tomada de decisão** (aceitação, rejeição, nova amostragem) para o todo o lote com base em dados amostrais.
- A adoção de p**lanos amostrais** adequados visa a **garantia de qualidade** para o consumidor e uma inspeção justa para o fornecedor.

Vantagens e desvantagens da amostragem

Algumas vantagens

- Menor custo.
- Menor esforço operacional.
- Menor manuseio de produtos e diminuição no risco de avarias.
- Aplica-se a testes destrutivos.
- Redução na quantidade de erros de inspeção.

Algumas desvantagens

- Risco de aceitar lotes de qualidade ruim.
- Risco de rejeitar lotes de boa qualidade.
- Necessidade de planejamento e documentação do procedimento de amostragem.
- Habilitação dos operários para execução adequada dos planos.

Tipos de planos de amostragem

1. **Plano de amostragem única:** o sentenciamento do lote (aceitação ou rejeição) é resultante da seleção e análise de uma **única amostra**.
2. **Plano de amostragem dupla:** o sentenciamento do lote (aceitação ou rejeição) pode se dar após a seleção de uma primeira amostra, ou, dependendo dos resultados, a seleção de uma segunda amostra pode ser necessária.
3. **Plano de amostragem múltipla:** extensão do plano de amostragem dupla, em que a seleção de múltiplas amostras pode ser necessária até uma decisão final (aceitação ou rejeição) quanto ao lote.

Sobre a composição dos lotes

- Os lotes devem ser **homogêneos** (itens produzidos pelos mesmos operários, com a mesma matéria prima, num curto período de tempo).
- A inspeção de grandes lotes é economicamente (e operacionalmente) mais viável do que a inspeção de pequenos lotes.
- Lotes devem ser organizados e manuseados de forma a minimizar riscos de avarias e perdas no deslocamento e no processo de inspeção.

Sobre a amostragem

- As unidades a compor a amostra devem ser selecionadas **aleatoriamente** do lote.
- A seleção não aleatória pode induzir a escolha de uma amostra não representativa, aumentando o risco de se tomar decisões erradas.
- Caso o lote seja homogêneo o uso de amostragem **aleatória simples** (ou mesmo amostragem sistemática) é indicado e suficiente.
- Se o lote, por algum motivo, **não for homogêneo**, mas é possível dividi-lo em partes aproximadamente homogêneas, a amostragem **aleatória estratificada** é uma boa opção.

Diretrizes para o uso de amostragem de aceitação

- Há diversos **sistemas de amostragem** de aceitação que normatizam seu planejamento e execução (ex: sistema NQA, MIL STD 105E, ISO 2859, etc.).
- Planos de amostragem de aceitação **não são estáticos**, podendo ser repensados conforme a experiência do consumidor.
- Em geral, planos de amostragem de aceitação são definidos considerando fatores como **esforço e custo** de amostragem, **riscos** associados ao cliente e ao fornecedor, nível de **maturidade** da organização, etc.

Planos de amostragem única para atributos

- Considere um lote com N itens (lote de tamanho N). Um plano de amostragem única para atributos é definido, basicamente, por:
  - n: o tamanho amostral.
  - c: o número de aceitação ($c < n$, inteiro positivo).
- Seja x o número de itens não conformes na amostra. A regra de decisão fica estabelecida da seguinte forma:
  - Se $x \leq c$ então o lote é aceito.
  - Se $x > c$ então o lote é rejeitado.

Distribuição hipergeométrica

- Seja D o número de peças defeituosas no lote. Se o processo de amostragem for realizado sem reposição, então X tem distribuição **hipergeométrica**:

$$\Pr(X = x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \min(n, D).$$

- A **probabilidade de aceitação** de um lote fica dada por:

$$\Pr(\text{Aceitação}) = \Pr(X \leq c) = \sum_{x=0}^{c} P(X = x).$$

Distribuição binomial

- A distribuição **binomial** é uma alternativa à distribuição hipergeométrica se:
  - A amostragem for realizada com reposição ($p = D/N$).
  - O tamanho da amostra for muito menor que o tamanho do lote ($n <<< N$).
  - Se assumirmos que o lote é resultante de um processo teoricamente infinito, que produz itens não conformes com probabilidade p.
- Nesse caso:

$$\Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- Novamente:

$$\Pr(\text{Aceitação}) = \Pr(X \leq c) = \sum_{x=0}^{c} P(X = x).$$

Exercício

Calcule a probabilidade de aceitação para cada um dos planos apresentados na sequência usando a distribuição hipergeométrica.

1. $c = 0; N = 50; n = 10; D = 3.$
2. $c = 1; N = 50; n = 10; D = 3.$
3. $c = 2; N = 50; n = 10; D = 3.$

Calcule a probabilidade de aceitação para cada um dos planos apresentados na sequência usando a distribuição binomial.

1. $c = 1; n = 10; p = 0.06.$
2. $c = 1; n = 20; p = 0.06.$
3. $c = 1; n = 40; p = 0.06.$

Solução

```r
# Hipergeométrica. --------------------------
N <- 50 # Número total de itens.
n <- 10 # Número de itens em uma amostra aleatória.
D <- 3  # Total de itens defeituosos.
c <- 2  # Quantidade aceitável de itens defeituosos na amostra.

# factorial(N)/(factorial(n) * factorial(N - n)) == choose(N, n)
x <- 2
# cumsum(choose(D, x) * choose(N - D, n - x)/choose(N, n))
phyper(0:c, D, N - D, n)
```

```
# [1] 0.5040816 0.9020408 0.9938776
```

```r
# Binomial. --------------------------------
n <- c(10, 20, 30) # Número de itens amostrados.
p <- 0.06          # Probabilidade de item defeituoso.
c <- 1             # Quantidade aceitável de defeituosos na amostra.

pbinom(c, n, p)
```

```
# [1] 0.8824120 0.6604546 0.4554685
```

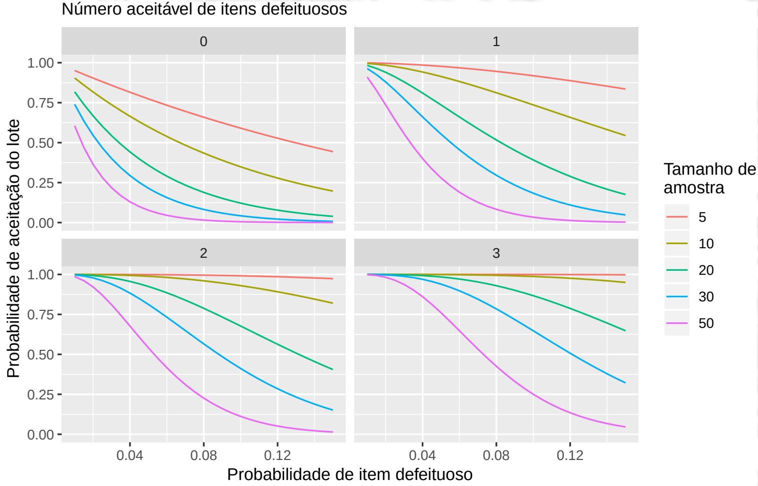
Curva característica de operação (CCO)

- A **curva característica de operação** é uma ferramenta importante para o planejamento e análise de desempenho de planos de amostragem de aceitação.
- No contexto sob estudo, a CCO plota a probabilidade de aceitação *versus* p, a fração de defeituosos no lote (ou probabilidade de defeituosos no processo).
- Por meio da CCO podemos avaliar as probabilidades de aceitação e rejeição para diferentes valores de p.

Código para a construção da CCO (binomial)

```r
da <- expand.grid(n = c(5, 10, 20, 30, 50),
                  prb = seq(0.01, 0.15, by = 0.005),
                  tol = c(0, 1, 2, 3))
da$ac <- with(da,
              mapply(FUN = pbinom,
                     q = tol,
                     size = n,
                     prob = prb))

library(ggplot2)

ggplot(data = da) +
    aes(x = prb, y = ac, color = factor(n), group = n) +
    facet_wrap(facets = ~tol) +
    geom_line() +
    labs(x = "Probabilidade de item defeituoso",
         y = "Probabilidade de aceitação do lote",
         color = "Tamanho de\namostra",
         subtitle = "Número aceitável de itens defeituosos")
```

Gráfico da CCO (binomial)



Especificação dos parâmetros de um plano de amostragem única para atributos

A definição dos parâmetros (n e c) de um plano de amostragem única para atributos requer a especificação de:

- p_0 : fração *aceitável* de itens defeituosos.
- p_1 : fração *não aceitável* de itens defeituosos.
- α : probabilidade de rejeição de um lote com fração p_0 (risco do fornecedor).
- β : probabilidade de aceitação de um lote com fração p_1 (risco do consumidor).

Especificação dos parâmetros de um plano de amostragem única para atributos

- Uma vez especificados p_0, p_1, α e β, deve-se determinar n e c que satisfazem:

$$1-\alpha = \Pr(\text{Aceitação}|p_0) = \sum_{x=0}^{c} \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot p_0^x (1-p_0)^{n-x}.$$

$$\beta = \Pr(\text{Aceitação}|p_1) = \sum_{x=0}^{c} \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot p_1^x (1-p_1)^{n-x}.$$

- O sistema de equações apresentado é não linear, não havendo solução direta.
- Como os valores de n e c são inteiros, em geral se procura alguma configuração para esses valores tal que $\Pr(\text{Aceitação}|p_0) \geq 1-\alpha$ e $\Pr(\text{Aceitação}|p_1) \leq \beta$.

Exercício

Determine um plano amostral tal que se um lote tiver proporção 0.01 de itens defeituosos ele será aceito com probabilidade 0.98 e se o lote tiver proporção 0.05 de ítens defeituosos ele será aceito com probabilidade 0.10.

Determine planos amostrais que satisfaçam:

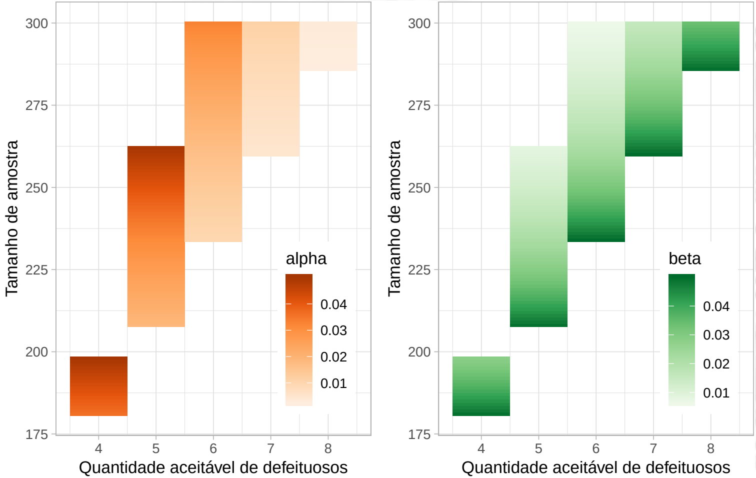
1. $p_0 = 0.01; p_1 = 0.05; \alpha = 0.05; \beta = 0.05.$
2. $p_0 = 0.01; p_1 = 0.05; \alpha = 0.01; \beta = 0.05.$
3. $p_0 = 0.01; p_1 = 0.05; \alpha = 0.01; \beta = 0.01.$

Solução

```r
# Função que retorna alpha e beta.
alpha_beta <- function(n, c, p0, p1) {
    hat_alpha <- 1 - pbinom(q = c, size = n, prob = p0)
    hat_beta <- pbinom(q = c, size = n, prob = p1)
    cbind(hat_alpha, hat_beta)
}

# Cria o grid e avalia a primeira condição.
grid <- expand.grid(n = 100:300, c = 0:20)
u <- t(with(grid,
            mapply(alpha_beta, n = n, c = c,
                   MoreArgs = list(p0 = 0.01, p1 = 0.05))))
colnames(u) <- c("alpha", "beta")
grid <- cbind(grid, as.data.frame(u))

# Descarta os pontos que não atendem as condições.
alpha <- 0.05
beta <- 0.05
i <- (grid$alpha <= alpha) & (grid$beta <= beta)
grid <- grid[i, ]

head(grid[with(grid, order(n, c)), ], n = 2)
```

```
#       n c      alpha       beta
# 886 181 4 0.03632986 0.04916258
# 887 182 4 0.03706006 0.04762109
```

```r
lgd <- labs(x = "Quantidade aceitável de defeituosos",
            y = "Tamanho de amostra")
thm <- theme(legend.position = c(0.95, 0.05),
             legend.justification = c(1, 0))

p1 <-
    ggplot(data = grid) +
    aes(x = c, y = n, fill = alpha) +
    geom_tile() +
    scale_fill_distiller(palette = 7, direction = 1) +
    lgd + theme_light() + thm
p2 <-
    ggplot(data = grid) +
    aes(x = c, y = n, fill = beta) +
    geom_tile() +
    scale_fill_distiller(palette = 5, direction = 1) +
    lgd + theme_light() + thm
gridExtra::grid.arrange(p1, p2, nrow = 1)
```


Tamanho de amostra
300
275
250
225
200
175
4
5
6
7
8
Quantidade aceitável de defeituosos
alpha
0.04
0.03
0.02
0.01
Tamanho de amostra
300
275
250
225
200
175
4
5
6
7
8
Quantidade aceitável de defeituosos
beta
0.04
0.03
0.02
0.01

Exercício

Considere $p_0 = 0.02$ e $p_1 = 0.05$. Verifique se cada um dos planos relacionados na sequência satisfazem a $\alpha \leq 0.05$ e $\beta \leq 0.05$:

1. $n = 150; c = 3$.
2. $n = 150; c = 5$.
3. $n = 300; c = 10$.
4. $n = 500; c = 16$.

Solução

```r
cond <- data.frame(n = c(150, 150, 300, 300),
                   c = c(3, 5, 10, 16))
u <- t(with(cond,
            mapply(alpha_beta, n = n, c = c,
                   MoreArgs = list(p0 = 0.02, p1 = 0.05))))
colnames(u) <- c("alpha", "beta")
cond <- cbind(cond, as.data.frame(u))
cond
```

```
#     n  c        alpha       beta
# 1 150  3 0.3527604910 0.05476981
# 2 150  5 0.0818766850 0.23443550
# 3 300 10 0.0409620591 0.11230139
# 4 300 16 0.0001435752 0.66663902
```

Amostragem de aceitação com inspeção retificadora

- Um programa de amostragem de aceitação com **inspeção retificadora** tem como diferencial o **reparo ou substituição** dos itens defeituosos encontrados.
- Caso o lote seja **rejeitado**, uma **varredura 100%** é realizada e todos os itens defeituosos no lote são reparados ou substituídos.
- Caso o lote seja **aceito**, apenas os itens defeituosos verificados **na amostra** são reparados ou substituídos.

Fluxograma do procedimento

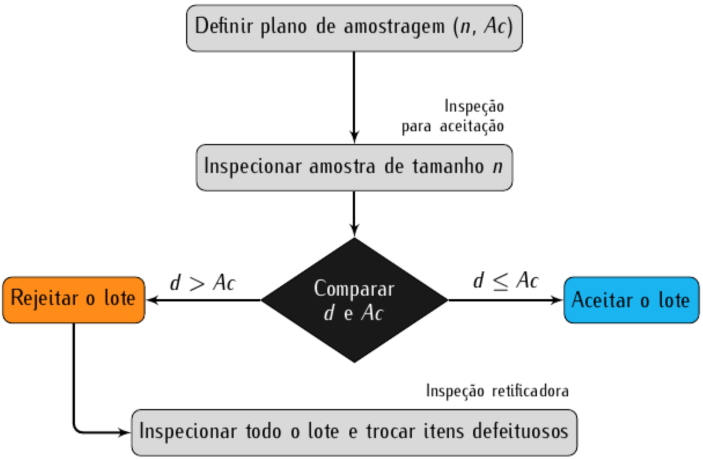


Figura 1. Plano de amostragem de aceitação com inspeção retificadora (COSTA, EPPRECHT e CARPINETTI, 2010). Fluxograma adaptado pelo autores.

Qualidade média de saída

- **Qualidade Média de Saída (QMS)** – fração esperada de itens defeituosos na saída, ou seja, que será adquirida pelo comprador.

$$\text{QMS} = P_{AC} \cdot p \cdot \frac{(N-n)}{N},$$

em que:

  - P_{AC}: probabilidade de aceitação do lote.
  - p: fração de defeituosos (no lote, ou do processo correspondente).

- **Nota:** Observe que a medida que o tamanho do lote (N) aumenta em relação ao tamanho da amostra (n), QMS se aproxima de $P_{AC} \cdot p$.

Inspeção total média

- **Inspeção Total Média (ITM)** - número médio de inspeções por lote, refletindo o esforço requerido no processo de inspeção:
$$\text{ITM} = n + (1 - P_{AC})(N - n).$$
- Gráficos de QMS e ITM pela qualidade de entrada do lote (p) são ferramentas úteis para se planejar e avaliar o desempenho do processo de amostragem com inspeção retificadora.

Exercício

Suponha, para um processo industrial em que $p = 0.005$, a utilização de um plano de amostragem com inspeção de retificação com $N = 10000$, $n = 200$ e $c = 2$.

1. Calcule QMS e ITM para esse plano de amostragem.
2. Obtenha as curvas de QMS e ITM para valores de p, a proporção de itens defeituosos no lote, no intervalo $(0; 0.05)$.
3. Com base no gráfico do item anterior, forneça o máximo de QMS (ainda que aproximado) e interprete-o.

Solução

```
# 1. Calcule QMS e ITM para esse plano de amostragem.
p <- 0.005
N <- 10000
n <- 200
c <- 2

QMS <- function(p, pac, N, n) pac * p * (N - n)/N
ITM <- function(pac, N, n) n + (1 - pac) * (N - n)

# Qualidade média de saída.
QMS(p, pbinom(c, n, p), N, n)
```

```
# [1] 0.004508787
```

```
# Número médio de inspeções (de itens) por lote.
ITM(pbinom(c, n, p), N, n)
```

```
# [1] 982.4264
```

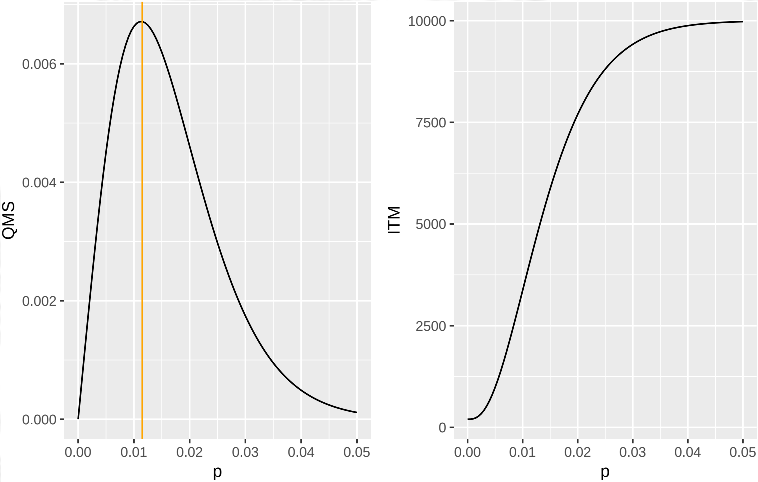
Solução

```r
p_seq <- seq(0, 0.05, by = 0.0005)
QMS_seq <- QMS(p_seq, pbinom(c, n, p_seq), N, n)
ITM_seq <- ITM(pbinom(c, n, p_seq), N, n)
da <- data.frame(p = p_seq, QMS = QMS_seq, ITM = ITM_seq)

i <- which.max(da$QMS)
da[i, ]
```

```
#          p         QMS      ITM
# 24 0.0115 0.006712187 4163.315
```

```r
gridExtra::grid.arrange(
               ggplot(data = da) + aes(x = p, y = QMS) + geom_line() +
               geom_vline(xintercept = da[i, "p"],color = "orange") ,
               ggplot(data = da) + aes(x = p, y = ITM) + geom_line(),
               nrow = 1)
```

Solução


QMS
0.000
0.002
0.004
0.006
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
p
ITM
0
2500
5000
7500
10000
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
p

Plano de amostragem dupla

Um plano de **amostragem dupla** envolve uma ou duas amostras, e consequentemente, um maior número de parâmetros:

- n_1 e n_2: **tamanhos de amostra** na primeira e na (possível) segunda amostragem.
- Ac_1 e Ac_2: **valores de aceitação** nas duas etapas de amostragem.
- Re_1: **valor de rejeição** na primeira amostragem.

Plano de amostragem dupla

- **Passo 1:**Inspeção de uma amostra aleatória de n_1 itens.
  - Se o número de itens defeituosos na amostra (d_1) for menor ou igual a Ac_1, o lote é aceito.
  - Se o número de itens defeituosos na amostra (d_1) for maior ou igual a Re_1, o lote é rejeitado.
  - Se $Ac_1 < d_1 < Re_1$, então segue o passo 2.
- **Passo 2:** No caso de $Ac_1 < d_1 < Re_1$, retira-se uma nova amostra aleatória de n_2 itens. Seja d_2 o número de itens defeituosos na segunda amostra.
  - Se $d_1 + d_2 \leq Ac_2$, o lote é aceito.
  - Se $d_1 + d_2 > Ac_2$, o lote é definitivamente rejeitado.

Plano de amostragem dupla

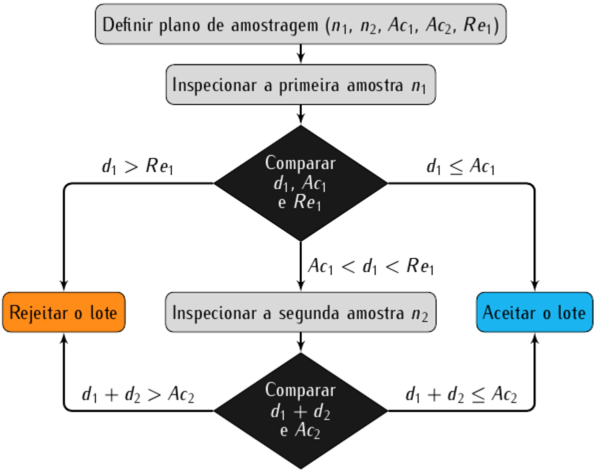


Figura 2. Plano de amostragem dupla (COSTA, EPPRECHT e CARPINETTI, 2010). Fluxograma adaptado pelos autores.

Exercício

Para o plano de amostragem dupla com parâmetros $n_1 = 50$, $n_2 = 50$, $Ac_1 = 2$, $Re_1 = 4$ e $Ac_2 = 4$:

1. Calcule a probabilidade de aceitação para $p = 0.01$ e $p = 0.05$.
2. Obtenha a curva característica de operação.
3. Obtenha também as curvas características de operação separadas para as duas etapas do plano.

Solução

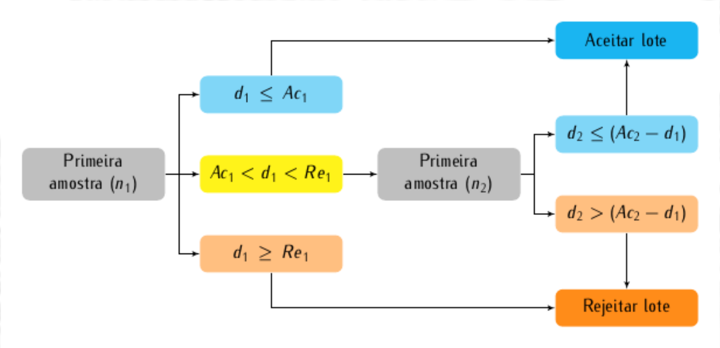


Figura 3. Ávore de probabilidades para o plano de amostragem dupla. Fonte: os autores.

Solução

```r
# Condições.
n1 <- 50; n2 <- 50; Re1 <- 4; Ac1 <- 2; Ac2 <- 4; p <- 0.05
A <- pbinom(Ac1, size = n1, prob = p)
B <- pbinom(Re1 - 1, size = n1, prob = p)

Ac_1 <- A;              Re_1 <- 1 - B;          Am_2 <- B - A
c("Aceitar" = Ac_1, "Rejeitar" = Re_1,
  "Amostrar" = Am_2, "Soma" = Ac_1 + Re_1 + Am_2)
```

```
#   Aceitar  Rejeitar  Amostrar      Soma
# 0.5405331 0.2395920 0.2198748 1.0000000
```

```r
C <- pbinom(Ac2 - (Ac1 + 1), size = n2, prob = p)
c("Aceitar" = Am_2 * C, "Rejeitar" = Am_2 * (1 - C),
  "Soma" = Am_2 * C + Am_2 * (1 - C))
```

```
#    Aceitar   Rejeitar       Soma
# 0.06144001 0.15843483 0.21987484
```

```r
c("Aceitar" = Ac_1 + Am_2 * C, "Rejeitar" = Re_1 + Am_2 * (1 - C))
```

```
#   Aceitar  Rejeitar
# 0.6019731 0.3980269
```

Plano de amostragem múltipla

- Um plano de múltipla é uma extensão do plano de amostragem dupla em que mais de duas amostras podem ser necessárias para se definir o destino do lote.
- Em qualquer etapa de um plano de amostragem múltipla tem-se valores específicos de aceitação e de rejeição, sendo que se nenhum desses valores for excedido, nova amostra deve ser selecionada.
- Numa última etapa, é fixado apenas um valor de aceitação de tal forma que o lote somente é aceito se o número de itens defeituosos na soma das amostras não excedê-lo.