

# Gráficos de controle Cusum e MMEP

## CE219 - Controle Estatístico de Qualidade

Prof. Cesar Taconeli  
taconeli@ufpr.br

Prof. Walmes Zeviani  
walmes@ufpr.br

Laboratório de Estatística e Geoinformação  
Departamento de Estatística  
Universidade Federal do Paraná

24 de abril, 2019

# Gráficos de Shewart

- ▶ Gráficos de controle de Shewart são ferramentas poderosas para a análise e **monitoramento de processos**.
- ▶ Um ponto fraco dos gráficos de controle de Shewart é o **baixo poder de detecção** de causas atribuíveis de baixa ou moderada magnitude.
- ▶ Estratégias para contornar essa limitação, como o uso de regras sensibilizantes ou o estreitamento dos limites de controle, tem a desvantagem de **aumentar** a frequência de **falsos alarmes**.
- ▶ Uma das explicações para o baixo poder dos gráficos de controle de Shewart é o fato de se considerar, a cada momento, apenas a amostra mais recente (desconsiderando as amostras passadas).

# Gráficos de controle alternativos

- ▶ Gráficos de controle da **soma cumulativa** (Cusum) e da **média móvel exponencialmente ponderada** (MMEP) se caracterizam por incorporar aos dados coletados em um particular período os resultados avaliados em períodos anteriores.
- ▶ Os gráficos Cusum e MMEP são alternativas **mais poderosas** que o gráfico de Shewart na **detecção** de pequenas alterações nos parâmetros dos processos, particularmente (mas não exclusivamente) ao analisar amostras unitárias.
- ▶ Gráficos de controle como o Cusum e o MMEP são usualmente chamados gráficos de controle **ponderados pelo tempo**.



## Gráfico de controle da soma cumulativa

# Definição

- ▶ O gráfico de controle das somas cumulativas baseia-se nas **somas acumuladas dos desvios** dos valores amostrais em relação a um valor alvo.
- ▶ A título de exemplo, considere  $\mu_0$  o valor alvo para a média de um processo e  $\bar{x}_j$  a média de uma  $j$ -ésima amostra de  $n \geq 1$  unidades (desenvolvimento semelhante vale para  $n = 1$ ).
- ▶ A estatística de um gráfico de controle de somas cumulativas fica definida por:

$$C_i = \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - \mu_0) = C_{i-1} + (\bar{x}_i - \mu_0)$$

- ▶ Assim, a estatística  $C_i$  é a soma acumulada dos desvios ao valor alvo até a  $i$ -ésima amostra (amostra atual).

## Padrões no gráfico Cusum

- ▶ Se ocorrer uma alteração na média do processo (suponhamos acima do valor alvo), será esperado observar uma sequência de desvios ao valor alvo positivos, de forma que a série da soma cumulativa apresentará uma tendência de crescimento.
- ▶ Comportamento inverso (tendência decrescente da série da soma cumulativa) será observada caso a média do processo fique alterada abaixo do valor alvo.
- ▶ Se a média do processo for o próprio valor alvo, os desvios positivos e negativos devem, em geral, se anular, não se observando alguma tendência significativa na série de somas cumulativas.

# Construção

- ▶ Uma construção de gráficos de controle para somas cumulativas é o Cusum tabular, que se baseia no seguinte par de estatísticas:

$$C_i^+ = \max \{0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+\}$$
$$C_i^- = \max \{0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-\}$$

com  $C_0^+ = C_0^- = 0$ .

- ▶ O valor de  $K$  é usualmente determinado como o ponto médio entre o valor-alvo do processo ( $\mu_0$ ) e o valor da média fora de controle ( $\mu_1$ ) que desejamos detectar rapidamente:

$$K = \frac{\mu_1 - \mu_0}{2} = \frac{\delta\sigma}{2},$$

sendo a segunda forma expressa em unidades de desvio padrão ( $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$ ).

# Gráfico de controle Cusum - fase 1

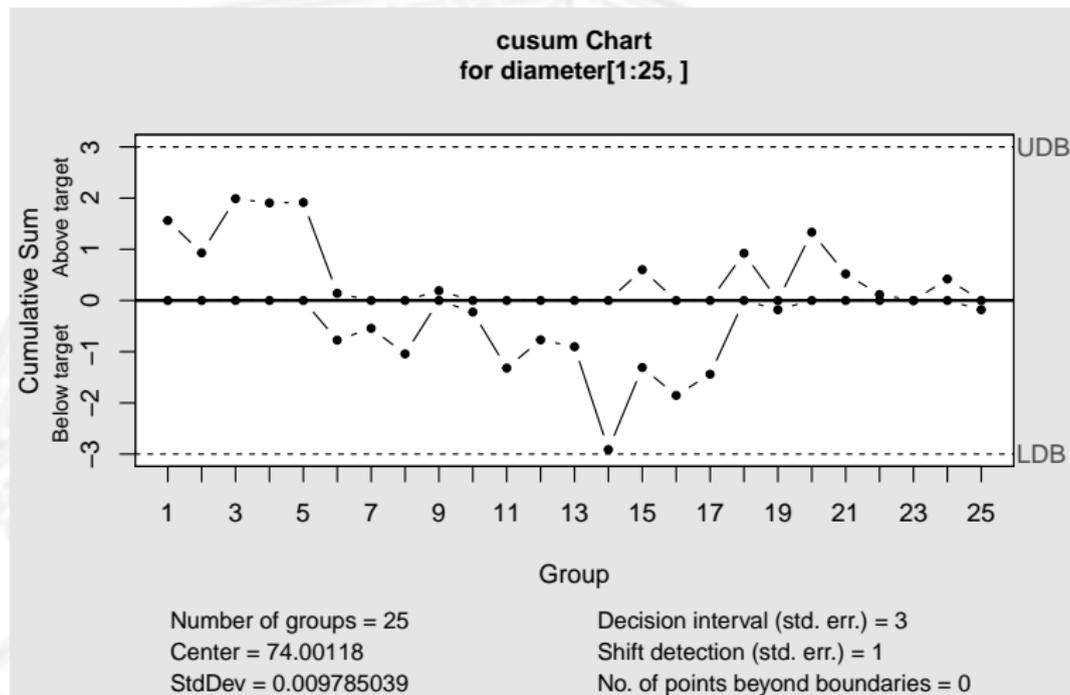


Figura 1. Gráfico de controle Cusum para a fase 1 ( $n = 5$ ).

# Gráfico de controle Cusum - fase 2

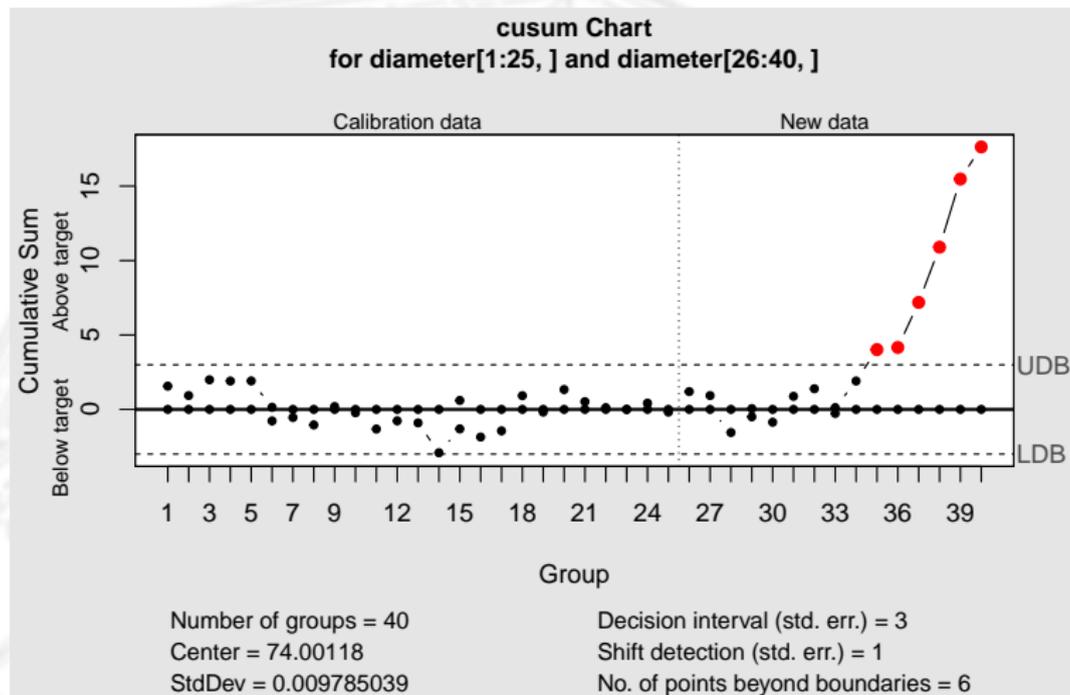


Figura 2. Gráfico de controle Cusum para a fase 2 ( $n = 5$ ).

# Gráfico de controle de Shewart

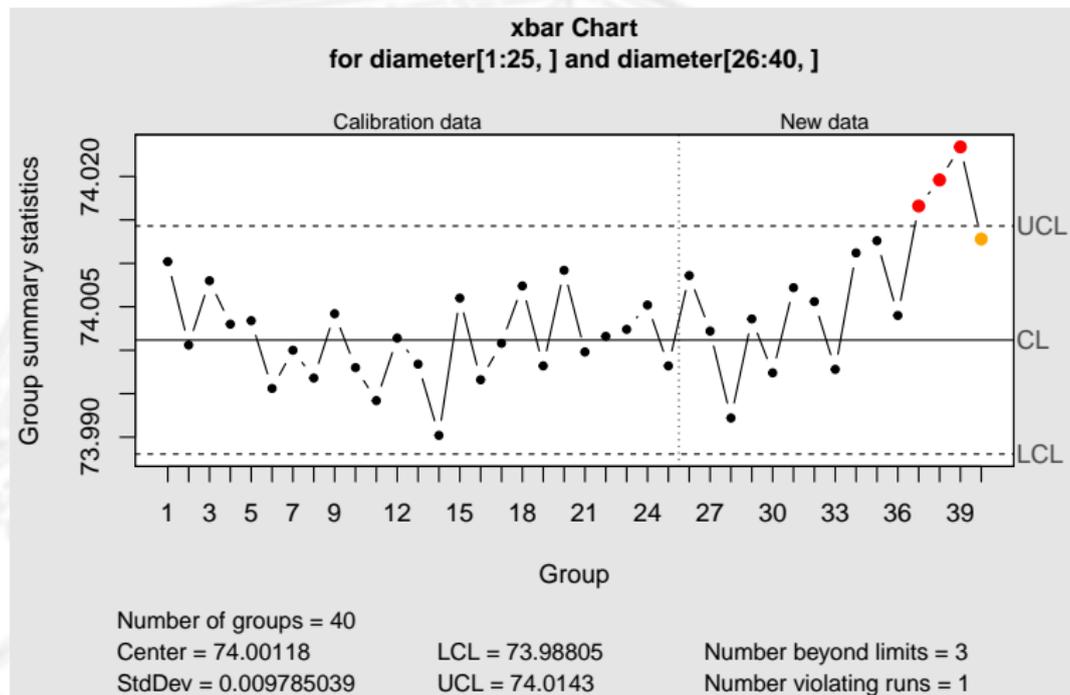


Figura 3. Gráfico de controle de Shewart para a média para a fase 2 ( $n = 5$ ).

# Parâmetros do Cusum

- ▶ O processo será considerado **fora de controle** se  $C_i^+$  ou  $C_i^-$  excederem um valor crítico  $H = h\sigma$ .
- ▶ As escolhas de  $K$  e  $h$  vão determinar a **performance do gráfico** de controle das somas cumulativas, e devem ser feitas cuidadosamente.
- ▶ O gráfico cusum se estende para o monitoramento com base em amostras de tamanho  $n > 1$  simplesmente calculando  $C_i^+$ ,  $C_i^-$ ,  $K$  e  $h$  com base em  $\bar{x}_i$  ao invés de  $x_i$ , e substituindo  $\sigma$  por  $\sigma/\sqrt{n}$ .

# Comprimento médio de sequência

Tabela 1. Comprimentos médios de sequência para gráficos Cusum com diferentes configurações de  $h$  e  $K$  (para  $n = 1$  e fixando  $CMS_0 = 370$ ).

$\delta$	Gráfico $\bar{X}$ $L = 3$	$h = 8.010$ $K = 0.25$	$h = 4.774$ $K = 0.5$	$h = 3.339$ $K = 0.75$	$h = 2.517$ $K = 1.0$
0.00	370.00	370.00	370.00	370.00	370.00
0.20	308.00	116.00	164.00	206.00	239.00
0.40	200.00	40.40	54.50	77.80	105.00
0.60	120.00	22.20	24.60	33.50	46.80
0.80	71.60	15.10	14.40	17.60	23.60
1.00	43.90	11.40	9.93	10.90	13.60
1.20	27.80	9.18	7.52	7.62	8.79
1.40	18.30	7.69	6.06	5.80	6.28
1.60	12.40	6.63	5.08	4.68	4.81
1.80	8.69	5.84	4.38	3.92	3.89
2.00	6.30	5.22	3.86	3.39	3.26
3.00	2.00	3.48	2.49	2.09	1.86
4.00	1.19	2.67	1.96	1.55	1.32

# Média após o descontrole

- ▶ Uma vez detectado o descontrole, a nova média do processo pode ser estimada por:

$$\hat{\mu} = \mu_0 + K + \frac{C_i^+}{N^+}, \quad \text{se } C_i^+ > H$$
$$\hat{\mu} = \mu_0 - K - \frac{C_i^-}{N^-}, \quad \text{se } C_i^- > H$$

sendo  $N^+$  (e  $N^-$ ) o número de períodos consecutivos em que  $C_i^+$  (e  $C_i^-$ ) foram não nulos.

# Cusum com resposta inicial rápida

- ▶ Como o gráfico Cusum se baseia no **histórico do processo**, ele poderá demorar a sinalizar um descontrole se ele acontecer de imediato, logo após algum re-início da produção.
- ▶ Uma maneira de amenizar isso é (re-)começar o monitoramento já a meio caminho do limiar de sinalização  $H$ .
- ▶ Para isso, basta fixar

$$C_0^+ = C_0^- = H/2$$

ao invés de  $C_0^+ = C_0^- = 0$ .



Gráfico de controle da média móvel  
exponencialmente ponderada (MMEP)

# Características

- ▶ O gráfico MMEP é uma **alternativa ao Cusum**, sendo também mais eficiente do que os gráficos de Shewart na detecção de baixas ou moderadas alterações nos parâmetros do processo.
- ▶ Também para o gráfico MMEP o valor a ser plotado num dado momento incorpora valores das **amostras passadas** (na forma de uma média ponderada).
- ▶ A diferença é que para o gráfico MMEP os **pesos** atribuídos aos dados de amostras passadas **diminuem** conforme a **distância** dos momentos de coleta.
- ▶ Os gráficos de controle MMEP são particularmente usados para **amostras unitárias**, embora possam ser aplicados também quando  $n > 1$ .

# Construção

- ▶ A estatística plotada no gráfico de controle MMEP no  $i$ -ésimo momento de observação é definida por:

$$y_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)y_{i-1},$$

sendo  $0 < \lambda \leq 1$ ,  $y_0 = \mu_0$  e  $x_i$  o valor observado na  $i$ -ésima amostra.

- ▶ Uma forma equivalente de escrever  $y_i$  é dada por:

$$y_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j x_{i-j} + (1 - \lambda)^i y_0.$$

- ▶ Fica evidente pela expressão apresentada que  $y_i$  é **uma média ponderada dos valores amostrais anteriores**, em que os **pesos caem geometricamente** conforme a distância para a atual amostra.

# Ilustração

Para fins de ilustração, os primeiros valores do gráfico MMEP são:

$$y_0 = \mu_0$$

$$y_1 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)y_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)\mu_0$$

$$y_2 = \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_1 = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1 + (1 - \lambda)^2\mu_0$$

$$y_3 = \lambda x_3 + (1 - \lambda)y_2 = \lambda x_3 + (1 - \lambda)x_2 + (1 - \lambda)^2x_1 + (1 - \lambda)^3\mu_0$$

⋮

$$y_k = \lambda x_k + (1 - \lambda)y_{k-1} = \lambda x_k + (1 - \lambda)x_{k-1} + \cdots \\ + (1 - \lambda)^{k-1}x_1 + (1 - \lambda)^k\mu_0$$

⋮

# Gráfico de controle MMEP - fase 1

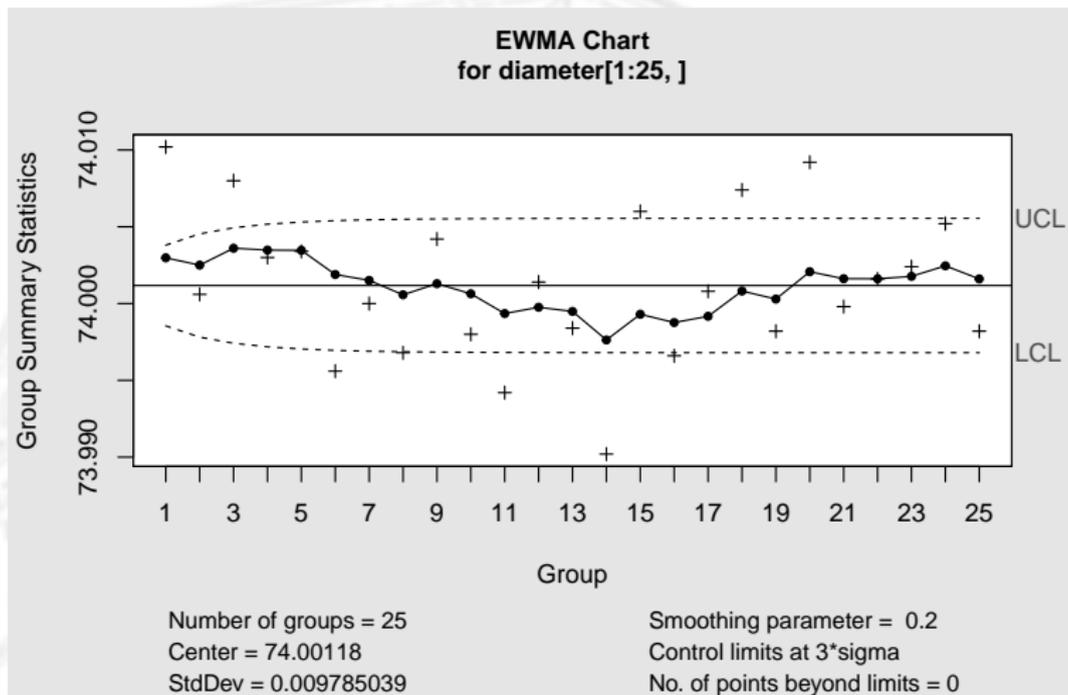


Figura 4. Gráfico de controle MMEP para a fase 1 ( $n = 5$ ).

# Gráfico de controle MMEP - fase 2

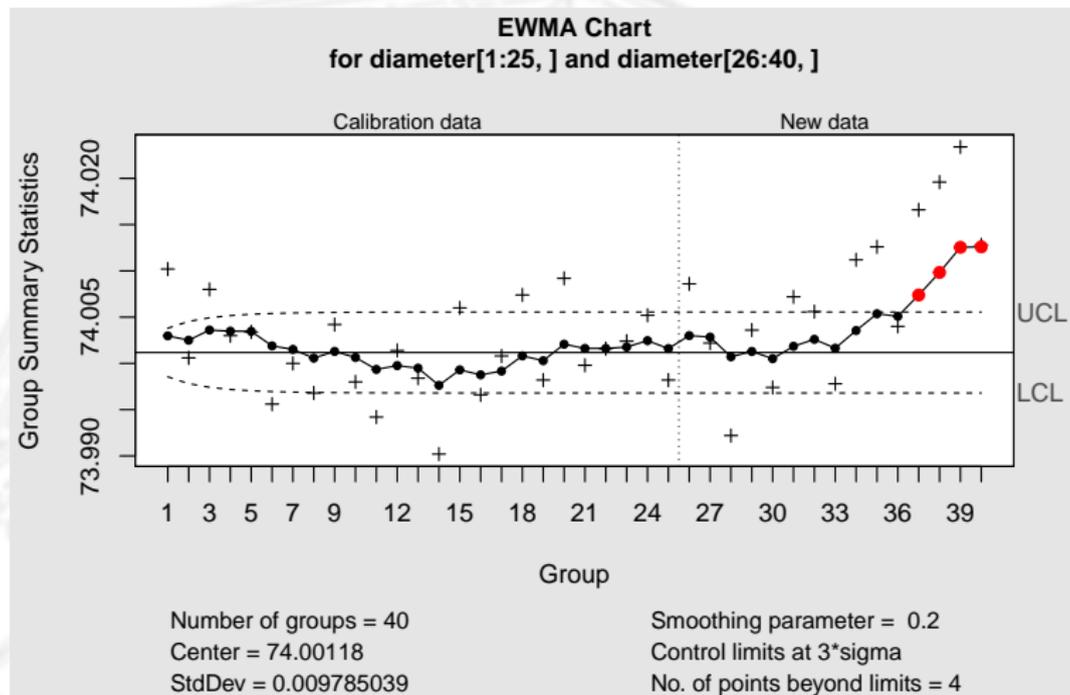


Figura 5. Gráfico de controle MMEP para a fase 2 ( $n = 5$ ).

# Gráfico de controle de Shewart

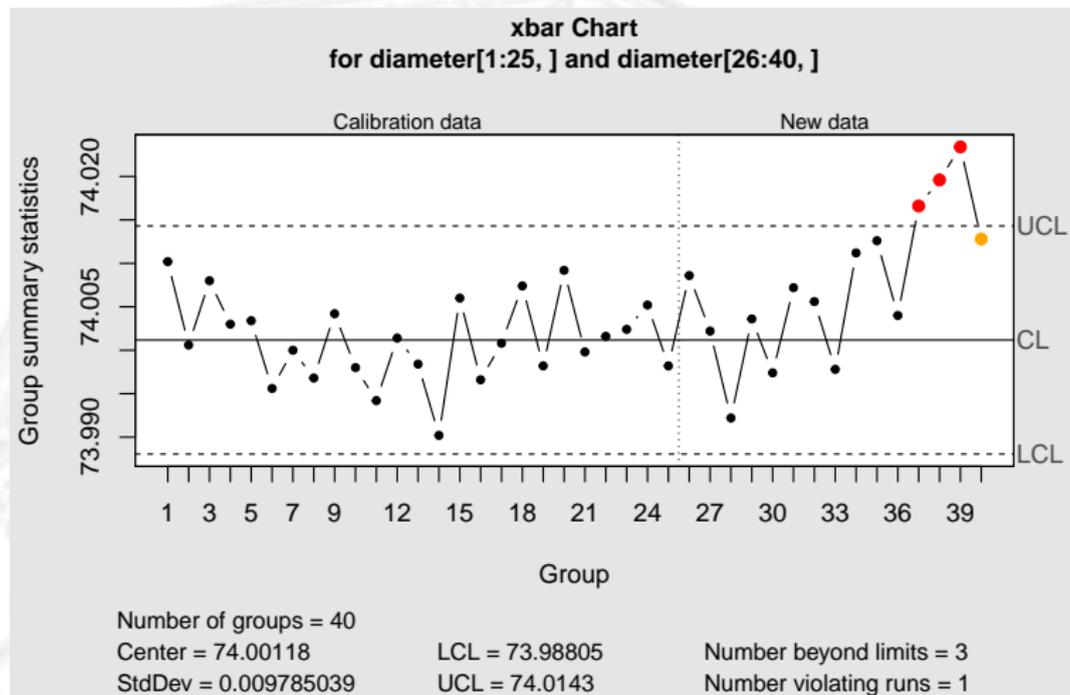


Figura 6. Gráfico de controle de Shewart para a média para a fase 2 ( $n = 5$ ).

# Parâmetros do MMEP

- ▶ O planejamento do gráfico de controle MMEP requer a definição dos parâmetros  $L$  e  $\lambda$ .
- ▶ O valor de  $L$  pode ser determinado de maneira a controlar a **taxa de falsos alarmes** (por exemplo fixando  $CMS_0 = 370$ ).
- ▶ O parâmetro  $\lambda$  **controla o peso** atribuído às observações de amostras passadas, de forma que, quanto menor o valor de  $\lambda$ , maior o peso atribuído às amostras anteriores.
- ▶ Menores valores para  $\lambda$  favorecem a **detecção** de pequenas alterações na média do processo.
- ▶ Se as observações originais ( $x_i$ ) são variáveis aleatórias independentes com variância  $\sigma^2$  então a variância de  $y_i$  é:

$$\sigma_{y_i}^2 = \sigma^2 \left( \frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}].$$

# Limites de controle

- ▶ Os limites de controle para o gráfico MMEP ficam dados por:

$$LSC_i = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

$$LC = \mu_0$$

$$LIC_i = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

## Limites de controle estacionários

- ▶ A medida que  $i$  aumenta (ou seja, a série de monitoramento se torna mais longa), ocorre que  $[1 - (1 - \lambda)^{2i}]$  se aproxima de 1, de tal forma que os limites de controle ficam aproximados por:

$$\text{LSC} = \mu_0 + L\sigma\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right)}$$

$$\text{LC} = \mu_0$$

$$\text{LIC} = \mu_0 - L\sigma\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right)},$$

sendo chamados **limites de controle estacionários**.

- ▶ Caso o gráfico de controle MMEP seja usado para amostras não unitárias, deve-se substituir  $x_i$  por  $\bar{x}_i$  e  $\sigma$  por  $\sigma/\sqrt{n}$  nas expressões anteriores.

# Comprimento médio de sequência

Tabela 2. Comprimentos médios de sequência para gráficos MMEP com diferentes configurações de  $\lambda$  e  $L$  (para  $n = 1$  e fixando  $CMS_0 = 370$ ).

$\delta$	Gráfico $\bar{X}$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.20$	$\lambda = 0.50$
	$L = 3$	$L = 2.701$	$L = 2.859$	$L = 2.978$
0.00	370.00	370.00	370.00	370.00
0.20	308.00	123.00	162.00	238.00
0.40	200.00	41.20	55.40	106.00
0.60	120.00	20.90	25.30	49.60
0.80	71.60	13.40	14.60	26.00
1.00	43.90	9.74	9.80	15.20
1.20	27.80	7.64	7.27	9.88
1.40	18.30	9.30	5.77	6.96
1.60	12.40	5.38	4.78	5.23
1.80	8.69	4.70	4.10	4.15
2.00	6.30	4.18	3.59	3.42
3.00	2.00	2.76	2.31	1.85
4.00	1.19	2.14	1.81	1.30

# Robustez ao afastamento da normalidade

- ▶ Uma propriedade importante dos gráficos MMEP é sua maior **robustez** a afastamentos da **normalidade** de  $X$  se compararmos aos gráficos de Shewart.
- ▶ A robustez ao pressuposto de normalidade garante, para os gráficos MMEP e sob não normalidade, indicadores de desempenho (riscos dos erros dos tipos I e II, CMS, TMA) mais próximos aos verificados sob normalidade.
- ▶ Esta propriedade é particularmente importante quando monitoramos o processo com base em medidas individuais.

# CMS para $X \sim \text{Gama}$

**Tabela 3.** Comprimentos médios de sequência sob controle para gráficos MMEP e de observações individuais para várias distribuições Gama.

Distribuição	Gráfico $\bar{X}$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.20$
	$L = 3$	$L = 2.49$	$L = 2.70$	$L = 2.86$
Normal	370	370	371	370
Gama(4, 1)	97	372	341	259
Gama(3, 1)	85	372	332	238
Gama(2, 1)	71	372	315	208
Gama(1, 1)	55	369	274	163
Gama(0.5, 1)	45	357	229	131

# CMS para $X \sim t$ -Student

Tabela 4. Comprimentos médios de sequência sob controle para gráficos MMEP e de observações individuais para várias distribuições t-Student.

Distribuição	Gráfico $\bar{X}$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.20$
	$L = 3$	$L = 2.49$	$L = 2.70$	$L = 2.86$
Normal	370	370	371	370
$t_{50}$	283	369	365	353
$t_{40}$	266	369	363	348
$t_{30}$	242	368	361	341
$t_{20}$	204	367	355	325
$t_{15}$	176	365	349	310
$t_{10}$	137	361	335	280
$t_8$	117	358	324	259
$t_6$	96	351	305	229
$t_4$	76	343	274	188

# Considerações

- ▶ Os gráficos de controle Cusum e MMEP são alternativas para monitorar a média do processo.
- ▶ Eles são mais vantajosos para medidas individuais.
- ▶ Para monitoramento da dispersão podem ser usados os gráficos de controle para  $R$  e  $s$ .