Análise da capacidade de processos

CE219 - Controle Estatístico de Qualidade

Prof. Cesar Taconeli
taconeli@ufpr.br

Prof. Walmes Zeviani
walmes@ufpr.br

Laboratório de Estatística e Geoinformação
Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Análise da capacidade de processos

Introdução

- Gráficos de controle são estabelecidos com base na **variabilidade natural do processo**, na ausência de causas atribuíveis de variação.
- No entanto, ainda que um particular processo esteja operando sob controle, isso não implica, necessariamente, que a produção atenda satisfatoriamente às **especificações do projeto**, às normas reguladoras, às expectativas dos clientes, etc.
- A Figura a seguir ilustra um processo operando sob contole, mas com uma quantidade considerável de itens produzidos **fora das especificações**.
- A análise da capacidade de processos tem como objetivo principal **avaliar o potencial da produção** em atender às especificações que são impostas.

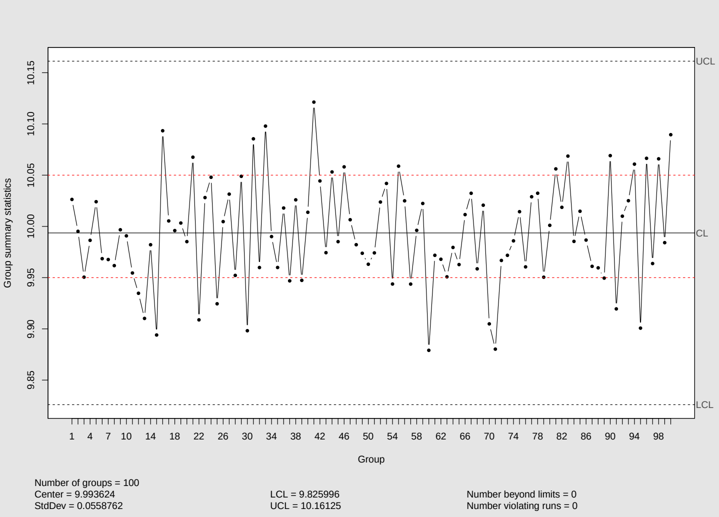

Figura 1. Gráfico de controle para medidas individuais. As linhas pretas são limites de controle. As linhas vermelhas são limites de especificação.

Limites de tolerância

- Uma forma de caracterizar a distribuição de um processo é por meio dos **limites naturais de tolerância.**
- Vamos admitir que a característica da qualidade sob estudo tenha distribuição Normal com média μ e desvio padrão σ. Os limites inferior e superior naturais de tolerância ficam definidos por:

$$\text{LSNT} = \mu + 3\sigma \quad \text{e} \quad \text{LINT} = \mu - 3\sigma.$$

- Com base na distribuição Normal, os limites naturais de tolerância compreendem 99.73% da produção.

Indíces de capacidade de processo

Probabilidade de produção fora das especificações (PPFE)

- Vamos considerar LIE e LSE os limites (inferior e superior) de especificação, fixados pela engenharia, visando atender às expectativas dos consumidores, da gerência, às normas técnicas, etc.
- Um primeiro indicador associado à capacidade do processo é a **probabilidade de produção fora das especificações** (PPFE), definida por:

$$\text{PPFE} = \Pr(X < LIE) + \Pr(X > LSE),$$

em que X é a variável (ou uma das variáveis) que caracteriza a qualidade.
- Claramente, quanto menor PPFE, maior a capacidade do processo em atender às especificações.

Exercício

Seja X alguma característica da qualidade de um processo industrial. Quando o processo opera sob controle estatístico, X tem distribuição Normal com média $\mu = 100$ e desvio padrão $\sigma = 0.1$.

1. Determine os limites naturais de tolerância do processo.
2. Se os limites de especificação forem LIE $= 99.75$ e LSE $= 100.25$, qual, a probabilidade de produção fora das especificações?
3. O que acontece com PPFE se o processo sair de controle, de tal forma que a média se desloque para $\mu = 100.1$?
4. O que acontece com PPFE se o processo sair de controle, de tal forma que o desvio padrão se desloque para $\sigma = 0.2$?
5. Considere novamente o processo operando sob controle. Vamos admitir que os limites de especificação sejam revistos pela engenharia, estabelecidos como LIE $= 99.9$ e LSE $= 100.1$. Calcule PPFE. Avalie esse novo cenário quanto ao controle e à capacidade do processo.

Solução

```r
# Condições de operação do processo. ----------------------------------
mu <- 100
sigma <- 0.1

# 1. Limites naturais de tolerância do processo. ------------------------
mu + 3 * c(LINT = -1, LSNT = 1) * sigma
```

```
##  LINT  LSNT
##  99.7 100.3
```

Solução

```r
# Função para determinar a PPFE.
ppfe <- function(lie, lse, ...) {
    pnorm(lie, ..., lower.tail = TRUE) +
        pnorm(lse, ..., lower.tail = FALSE)
}

# 2. PPFE com LIE = 99.75 e LSE = 100.25. ------------------------------
LSE <- 100.25
LIE <- 99.75

# Usando a normal padrão (transformação Z).
ppfe((LIE - mu)/sigma, (LSE - mu)/sigma)
```

```
## [1] 0.01241933
```

```r
# Passando média e desvio-padrão.
ppfe(LIE, LSE, mean = mu, sd = sigma)
```

```
## [1] 0.01241933
```

Solução

```r
# 3. PPFE com média deslocada para 100.1. --------------------------------
ppfe(LIE, LSE, mean = 100.1, sd = sigma)
```

```
## [1] 0.06703983
```

```r
# 4. PPFE se desvio-padrão deslocado para 0.2. -------------------------
ppfe(LIE, LSE, mean = mu, sd = 0.2)
```

```
## [1] 0.2112995
```

```r
# 5. Limites de especificação revistos. --------------------------------
LSE <- 100.1
LIE <- 99.9

ppfe(LIE, LSE, mean = mu, sd = sigma)
```

```
## [1] 0.3173105
```

Solução

```r
mu_grid <- seq(99, 101, length.out = 71)
mu_ppfe <- ppfe(LIE, LSE, mean = mu_grid, sd = 0.1)
sd_grid <- seq(0.01, 3, length.out = 71)
sd_ppfe <- ppfe(LIE, LSE, mean = 100, sd = sd_grid)

par(mfrow = c(1, 2))
plot(mu_ppfe ~ mu_grid, type = "l", col = "orange", lwd = 2)
plot(sd_ppfe ~ sd_grid, type = "l", col = "purple", lwd = 2)
layout(1)
```

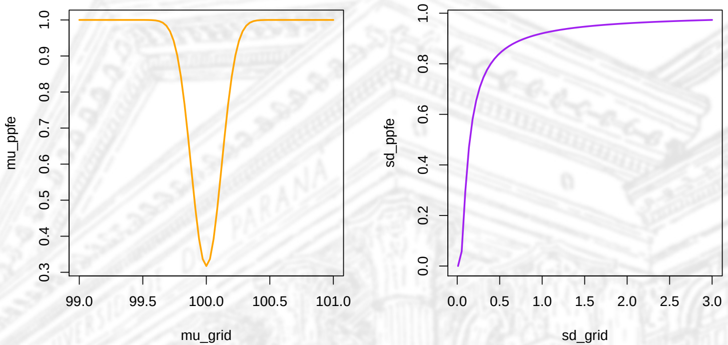

Figura 2. PPFE para alterações nos parâmetros dos processo conforme condições do exercício.

Solução

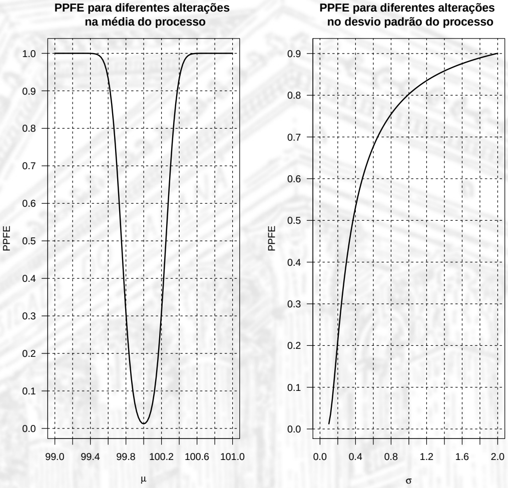

Figura 3. PPFE vs alterações nos parâmetros dos processos (Exercício).

O índice C_p

- Diversos **índices de capacidades de processos** são baseados na razão das faixas de **especificação** e de **tolerância**.
- O índice mais simples, baseado nesse tipo de construção, é definido por:

$$C_p = \frac{\mathrm{LSE} - \mathrm{LIE}}{6\sigma},$$

sendo chamado **razão da capacidade do processo.**

Exercício

Retome o exercício anterior. Calcule o valor de C_p para cada um dos itens 2 a 5. Avalie os resultados.

Solução

```r
Cp <- function(lie, lse, sigma) {
    (lse - lie)/(6 * sigma)
}

Cp(lie = 99.75, lse = 100.25, sigma = 0.1) # 2.
Cp(lie = 99.75, lse = 100.25, sigma = 0.1) # 3.
Cp(lie = 99.75, lse = 100.25, sigma = 0.2) # 4.
Cp(lie = 99.00, lse = 101.00, sigma = 0.1) # 5.
```

```
## [1] 0.8333333
## [1] 0.8333333
## [1] 0.4166667
## [1] 3.333333
```

Requisitos para aplicação de C_p

A aplicação adequada de C_p requer:

1. Que a característica da qualidade tenha distribuição Normal.
2. Que o processo opere sob controle.
3. Além disso, a média do processo deve estar no centro da faixa de especificação:

$$\mu = \frac{LIE + LSE}{2}.$$

As duas primeiras condições estendem-se a outros índices que estudaremos adiante. A condição de que a média esteja no centro das especificações é particularmente crítica para C_p.

C_p e a produção fora das especificações

Tabela 1. Relação entre C_p e produção fora das especificações. Assume processo com distribuição Normal, sob controle, centrado no ponto médio da faixa de especificação.

C_p	Itens não conformes (partes por milhão)
0.25	453 225
0.50	133 614
0.75	24 449
0.90	6 934
1.00	2 700
1.25	177
1.50	7
2.00	0.0018

O C_p em diferentes processos

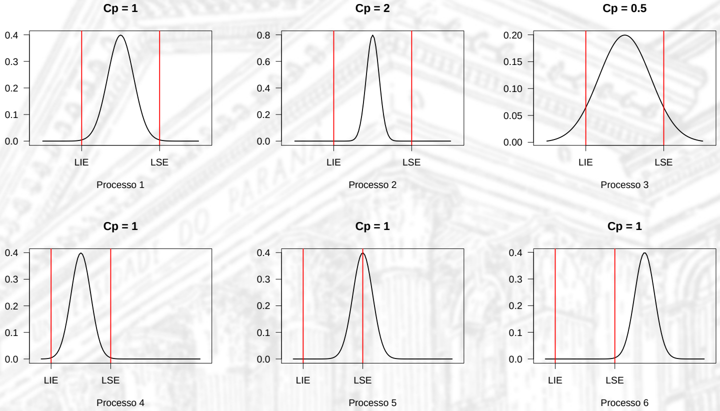

Figura 4. Ilustração de C_p para diferentes processos.

O índice C_{pk}

- Para processos **não centrados** no ponto médio da faixa de especificação, índices (razões) de capacidade apropriados devem ser aplicados.
- Uma alternativa é o índice C_{pk}, baseado nas razões de capacidade unilaterais:

$$C_{ps} = \frac{LSE - \mu}{3\sigma} \qquad C_{pi} = \frac{\mu - LIE}{3\sigma}.$$

- C_{pk} é definido por:

$$C_{pk} = \min(C_{ps}, C_{pi}).$$

Propriedades do índice C_{pk}

- Se o processo tiver centrado no ponto médio das especificações, então $C_{pk} = C_p$.
- É comum dizer que C_p mede a **capacidade potencial** do processo, enquanto C_{pk} mede sua **capacidade efetiva**.
- O índice C_{pk}, ao contrário de C_p, pode produzir valores **negativos**.
- Vale destacar que, caso o processo tenha **apenas um limite** de especificação (inferior ou superior), então C_{pi} (ou C_{ps}) pode ser usado, isoladamente, como índice de capacidade.

Exercício

Retome o exercício proposto inicialmente. Calcule o valor de C_{pk} para cada um dos itens 2 a 5. Avalie os resultados.

Solução

```r
Cpk <- function(lie, lse, mu, sigma) {
    min((mu - lie)/(3 * sigma),
        (lse - mu)/(3 * sigma))
}

Cpk(lie = 99.75, lse = 100.25, mu = 100.0, sigma = 0.1) # 2.
Cpk(lie = 99.75, lse = 100.25, mu = 100.1, sigma = 0.1) # 3.
Cpk(lie = 99.75, lse = 100.25, mu = 100.0, sigma = 0.2) # 4.
Cpk(lie = 99.00, lse = 101.00, mu = 100.0, sigma = 0.1) # 5.
```

```
## [1] 0.8333333
## [1] 0.5
## [1] 0.4166667
## [1] 3.333333
```

O C_{pk} em diferentes processos

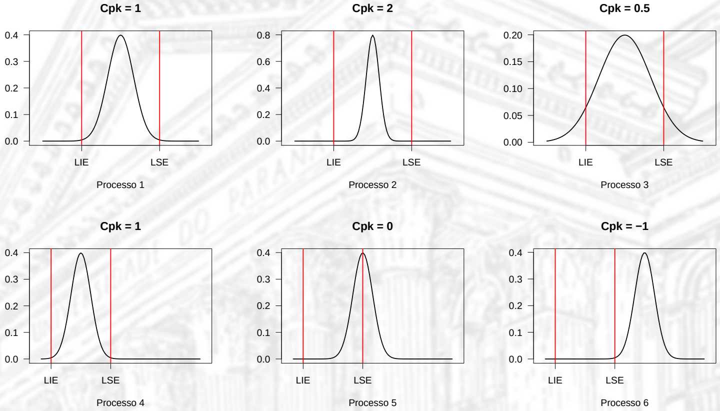

Figura 5. Ilustração de C_{pk} para diferentes processos.

O índice C_{pm}

Um índice de capacidade alternativo, que incorpora o desvio da média do processo ao centro da faixa de especificação, é definido por:

$$C_{pm} = \frac{\text{LSE} - \text{LIE}}{6\tau},$$

em que τ é a raiz quadrada dos **desvio quadrático esperado** em relação a T, ao **valor alvo** da produção:

$$\tau^2 = \text{E}\left[(X - T)^2\right] = \sigma^2 + (\mu - T)^2,$$

de tal forma que:

$$C_{pm} = \frac{\text{LSE} - \text{LIE}}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}.$$

Exercício

Considere dois processos A e B, tais que $X_A \sim \mathrm{N}(\mu_A = 50, \sigma_A = 5)$ e $X_B \sim \mathrm{N}(\mu_B = 57.5, \sigma_B = 2.5)$. Os limites de especificação são $\mathrm{LIE} = 35$ e $\mathrm{LSE} = 65$ para ambos. Calcule C_p, C_{pk} e C_{pm} para os processos A e B. Compare e discuta os resultados.

Solução

```r
# Valor alvo.
t <- (65 + 35)/2

Cpm <- function(lie, lse, mu, sigma, target) {
    (lse - lie)/(6 * sqrt(sigma^2 + (mu - target)^2))
}

c(Cp(lie = 35, lse = 65, sigma = 5.0),
  Cp(lie = 35, lse = 65, sigma = 2.5))
```

```
## [1] 1 2
```

```r
c(Cpk(lie = 35, lse = 65, mu = 50.0, sigma = 5.0),
  Cpk(lie = 35, lse = 65, mu = 57.5, sigma = 2.5))
```

```
## [1] 1 1
```

```r
c(Cpm(lie = 35, lse = 65, mu = 50.0, sigma = 5.0, target = t),
  Cpm(lie = 35, lse = 65, mu = 57.5, sigma = 2.5, target = t))
```

```
## [1] 1.0000000 0.6324555
```

Solução

```r
curve(dnorm(x, 50.0, 5.0), col = "orange",
      from = 30, to = 70, ylim = c(0, 0.2),
      xlab = "x", ylab = "f(x)")
curve(dnorm(x, 57.5, 2.5), col = "purple", add = TRUE)
abline(v = c(35, 65), lty = 2)
abline(v = t, lty = 2, col = "red")
mtext(side = 3, at = c(35, 65, t), text = c("LIE", "LSE", "Target"))
legend("topleft", lty = 1, bty = "n",
       col = c("orange", "purple"),
       legend = c("A", "B"))
```

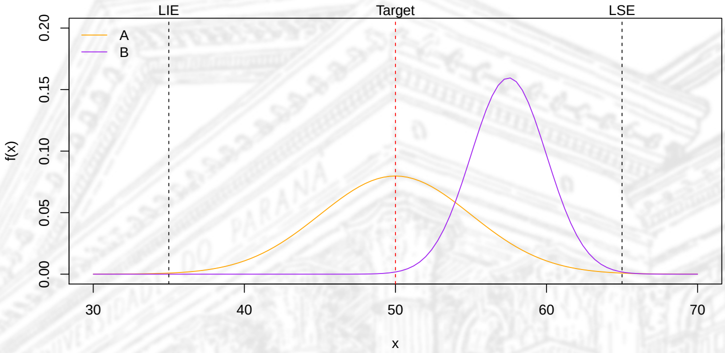

Figura 6. Ilustração das curvas de cada processo e as linhas de referências que demarcam as especificações.

O C_{pm} em diferentes processos

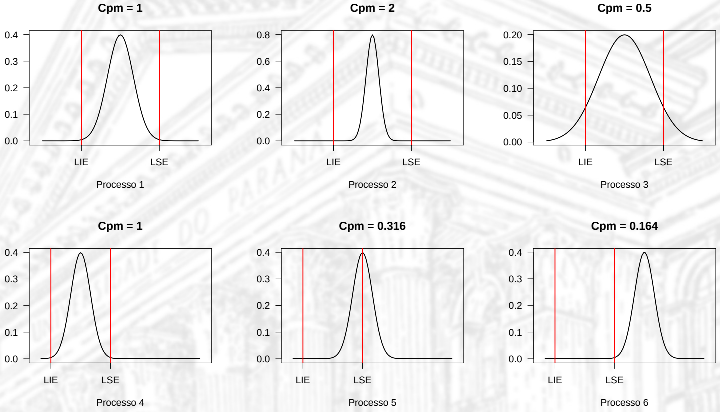

Figura 7. Ilustração de C_{pm} para diferentes processos.

Valores de referência

- Há diferentes critérios apresentados na literatura, e aplicados na prática, para classificação dos processos segundo suas capacidades.
- Uma classificação frequentemente utilizada, aplicada a processos centrados no ponto médio da faixa de especificação, estabelece que:

Tabela 2. Especificação bilateral, processo centrado e com distribuição Normal

Classificação	Valor de C_p	Itens fora das especificações (em ppm)
Capaz	$C_p > 1,33$	70
Razoavelmente capaz	$1 \leq C_p \leq 1,33$	Entre 70 e 2.700
Incapaz	$C_p < 1$	Acima de 2.700

Estimação dos índices de capacidade de processo

Estimação pontual do C_p

- Em geral, o desvio padrão do processo é **desconhecido**, podendo ser **estimado** por uma amostra selecionada do processo sob controle, com base na média e no desvio padrão amostrais.
- É comum também utilizar dados da fase 1 de um gráfico de controle para estimar σ. Nesse caso:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad \text{ou} \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4}.$$

- Assim, C_p fica estimado por:

$$\hat{C}_p = \frac{\text{LSE} - \text{LIE}}{6\hat{\sigma}}.$$

Estimação intervalar do C_p

- A fim de incorporar à estimativa o erro inerente ao processo de amostragem, podemos apresentar **intervalos de confiança** para a capacidade do processo.
- Um intervalo de confiança $100(1-\alpha)\%$ para C_p é definido por:

$$\hat{C}_p\sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}{n-1}} \leq C_p \leq \hat{C}_p\sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}{n-1}},$$

em que

$$\hat{C}_p = \frac{\mathrm{LSE}-LIE}{6s}, \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

e $\chi^2_{\alpha;n-1}$ é o quantil α da distribuição qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade.

Estimação intervalar do C_{pk}

Para C_{pk}, um intervalo de confiança (aproximada) $100(1-\alpha)\%$ tem limites:

$$\hat{C}_{pk}\left[1 - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{9n\hat{C}_{pk}} + \frac{1}{2(n-1)}}\right] \leq C_{pk} \leq \hat{C}_{pk}\left[1 + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{9n\hat{C}_{pk}} + \frac{1}{2(n-1)}}\right]$$

A não normalidade para índices de capacidade de processos

- Nenhum dos índices apresentados até o momento se aplica a dados sem distribuição Normal.
- Nesses casos, podemos recorrer, novamente, à transformação dos dados visando alcançar normalidade, ou usar algumas construções mais gerais de índices.
- Uma alternativa seria definir a capacidade do processo com base nos quantis amostrais (ou de algum outro modelo probabilístico de referência):

$$C_{pq} = \frac{\text{LSE} - \text{LIE}}{x_{0,99865} - x_{0,00135}},$$

sendo x_q o quantil amostral de ordem q (ou obtido a partir de algum modelo paramétrico mais adequado).