UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
CE003 - ESTATÍSTICA II

Segunda lista de Exercícios - Variáveis Aleatórias

Professora Fernanda

1. Uma máquina caça níquel de cassino possui três roletas. Na primeira e segunda roletas estão os símbolos ★■■♦ e na terceira roleta ■★♦♦. A máquina premia com R$ 10,00 o resultado ★★★ e premia com R$ 5,00 o resultado ♦♦♦. Para outros resultados não há¡ premiação e o custo de uma jogada é R$ 1,00. Seja a variável aleatória X o valor lucrado em uma jogada. Obtenha:

a) os valores que X assume;

b) a tabela de distribuição de probabilidades de X;

c) o valor esperado de X;

d) dado que o resultado da primeira roleta é ★, qual o valor esperado da jogada?

e) dado que o resultado da primeira e segunda roleta é ★, qual o valor esperado da jogada?

resp: $\{-1, 5, 10\}$,

x	-1	5	10
$p(x)$	0.953	0.031	0.016

$-0.640625, -0.3125, 1.75$.

2. Considere o lançamento independente de dois dados balanceados com faces numeradas de 1 á 6. Seja S a variável aleatória obtida com a soma das faces resultantes de um lançamento. Obtenha:

a) os valores que S assume;

b) gráfico da distribuição de probabilidades de S;

c) o valor esperado de S;

d) se o custo de uma jogada é R$ 1,00 e o prêmio para $S \geq 10$ é de R$ 5,00, qual o valor esperado da jogada?

resp: $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, 7, 0.

3. Numa pesquisa recente verificou-se que o número de pessoas com lesões graves em acidentes de carro é uma variá¡vel aleatória (X) com a seguinte distribuição de probabilidade:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,08	0,18	0,28	0,22	0,16	0,08

O que precisa ser satisfeito para que $p(x)$ seja uma distribuição de probabilidades? Qual o valor esperado de X, E(X)? Qual a variância de X, V(X)?

resp: $2.44, 1.8864$.

4. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot x, & 0 \leq x \leq 2, C > 0; \\ 0, & \text{outros casos.} \end{cases} \tag{1}$$

a) faça um esboço do gráfico da funá§ão $f(x)$;

b) qual o valor da constante C para que $f(x)$ seja uma função densidade de probabilidade (fdp);

c) se X é uma variável aleatória com fdp $f(x)$, quais os valores que X assume?

d) qual a $P(X < 1)$? Represente no gráfico;

e) qual a $P(0,5 < X < 1,5)$? Represente no gráfico;

f) qual o valor esperado de X? Represente no gráfico;

resp: 1/2, $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\}$, 1/4, 1/2, 4/3.

5. Determine a função de probabilidade de X, a partir da função de distribuiá§ão acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2; \\ 0.2, & -2 \leq x < 0; \\ 0.7, & 0 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases} \tag{2}$$

resp:

x	-2	0	2
$p(x)$	0.2	0.5	0.3

6. Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros $p = 0.4$ e $n = 10$. Calcule as seguintes probabilidades a partir da função de probabilidade da binomial.

a) $P(X \leq 2)$;
b) $P(X > 8)$;
c) $P(X = 4)$;
d) $P(5 \leq X \leq 7)$.

resp: $0.1673, 0.0017, 0.215, 0.3546$.

7. Faça o esboço do gráfico da função de probabilidades de uma variável aleatória X com distribuição binomial de parâmetros $p = 0.75$ e $n = 10$ e comente sobre a forma da distribuição.

a) qual o valor mais provável de X?
b) qual o valor menos provável de X?
c) represente no gráfico o valor esperado de X;
d) qual a $P(X > E(X))$?

resp: $8, 0, 7.5, 0.5256$,

8. Um teste de múltipla escolha contém 6 questões, cada uma com 4 alternativas sendo apenas uma correta. Suponha que o estudante apenas tente adivinhar ("chutar") em cada questáo.

a) qual a probabilidade do estudante acertar todas as questões?
b) qual a probabilidade do estudante acertar mais da metade das questões?

resp: $0.000244, 0.169434$,

9. Um teste de múltipla escolha possui 10 questões: 4 de matemática com 5 alternativas cada, 3 de física com 4 alternativas cada, e 3 de química com 3 alternativas cada. Suponha que o estudante apenas tente adivinhar ("chutar") em cada questáo.

a) a variável aleatória X número de questões corretas têm distribuição binomial? Justifique.
b) a variável aleatória Y número de questões corretas de matemática tem distribuição binomial? Justifique.
c) quais os parâmetros da distribuição de Y?

resp: não, sim, 4 e $1/5$.

10. Em uma caixa existem 10 bolas das quais 4 são brancas. Foram retiradas 3 bolas da caixa, com reposição.

a) qual a probabilidade de todas serem brancas?
b) qual a probabilidade de nenhuma ser branca?
c) qual a probabilidade de uma ser branca?

resp:

11. Suponha que X tenha distribuição Poisson com parâmetro $\lambda = 4$. Determine as seguinte probabilidades:

a) $P(X = 0)$;
b) $P(X \leq 2)$;
c) $P(X = 4)$;
d) $P(X = 8)$.

resp: $0.0183, 0.2381, 0.1954, 0.0298$.

12. Uma variável aleatória Z possui distribuição Normal padrão, ou seja, com parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. Determine

a) $P(0 \leq Z < 2)$; b) $P(Z > 2)$; c) $P(Z \leq -2)$; d) $P(-2 \leq Z < 2)$; e) $P(-1 \leq Z < 1)$; f) $P(-1,96 \leq Z < 1,96)$.

resp: $0.4772, 0.0228, 0.0228, 0.9545, 0.6827, 0.95$.

13. Uma variável aleatória Z possui distribuição Normal padrão, ou seja, com parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. Qual deve ser o valor de z para que

a) $P(0 \leq Z < z) = 0.45$? b) $P(Z > z) = 0.1$? c) $P(Z \leq z) = 0.75$? d) $P(-z \leq Z < z) = 0.8$? e) $P(-z \leq Z < z) = 0.5$? f) $P(|Z| < z) = 0.95$?

resp: $1.6449, 1.2816, 0.6745, 1.2816, -0.6745, -1.96$.

14. Seja X uma variável aleatória com distribuição Normal. Encontre a probabilidade dos seguintes eventos:

a) $P(-1.28 \leq X < 1.28)$ se $\mu = 0$, $\sigma = 1$?
b) $P(X < 1,21)$ se $\mu = 1$, $\sigma = 0.25$?
c) $P(13 \leq X < 21,22)$ se $\mu = 13$, $\sigma = 5$?
d) $P(-32 \leq X < -28)$ se $\mu = -30$, $\sigma = 3$?
resp: $0.799, 0.8, 0.45, 0.495$.

15. Aos 60 dias de idade os peixes de uma espécie apresentam comprimento normalmente distribuído com média de 15 cm e variância de 9 cm^2. O dono quer passar 80% dos peixes maiores para outro tanque para receber uma ração determinada. Qual deve ser o limite de comprimento usado para separar os peixes nessa proporção?
resp: 12.475.

16. O peso de frutos de goiaba é uma variável aleatória que pode ser modelada pela distribuição normal com $\mu = 100$ g e $\sigma^2 = 36$ g^2. O produtor classifica as frutas em tipo C ($<$ 95 g), tipo A ($>$ 105 g) e tipo B as intermediárias. Qual a proporção de frutas em cada classe? Qual deveria ser os valores de peso para ter 35%, 40% e 25% dos frutos nas classes C, B e A?
resp: $0.2, 0.6, 0.2, 97.69, 104.05$.

17. Considere uma urna contendo três bolas vermelhas e cinco pretas. Retire três bolas, com reposição, e defina a variável aleatória X igual ao número de bolas pretas.
a) obtenha a distribuição de X.
b) obtenha a média e a variância da v.a. X.
c) obtenha a média e a variância da v.a. $Y = 3X + 4$.

18. Uma moeda perfeita é lançada quatro vezes. Seja Y o número de caras obtidas.
a) obtenha a distribuição de Y.
b) obtenha a média e a variância da v.a. Y.
c) determine $P(X < 3)$.

resp:

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

$2, 1, 0.688$.

19. O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma v.a. com a seguinte distribuição de probabilidade

t	2	3	4	5	6	7
$p(t)$	0.1	0.1	0.3	0.2	0.2	0.1

a) calcule o tempo médio de processamento.
b) calcule $P(3 \leq T < 7)$.
c) para cada peça processada, o operário ganha um fixo de R$ 2,00, mas, se ele processa a peça em menos de seis minutos, ganha R$ 0,50 em cada minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em quatro minutos, recebe a quantia adicional de R$ 1,00. Encontre a distribuição, a média e a variância da v.a. G: quantia em R$ ganha por peá§a.
d) calcule $P(2 \leq G \leq 3,5|G > 3)$
e) obtenha a função de distribuição acumulada (f.d.a.) $F(t)$ e faça seu grá¡fico.

resp: 4.6, 0.8

g	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
$p(g)$	0.3	0.2	0.3	0.1	0.1

2.75 e 0.4125, 1.

20. Uma v.a. X tem a seguinte função de distribuição:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 10 \\ 0,2 & \text{se} \quad 10 \leq x \leq 12 \\ 0,5 & \text{se} \quad 12 \leq x \leq 13 \\ 0,9 & \text{se} \quad 13 \leq x \leq 25 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 25. \end{cases}$$

Determine:

a) a função de probabilidade de X;

b) $P(X \leq 12)$, $P(X < 12)$, $P(12 \leq X \leq 20)$, $P(X > 18)$.

resp:

x	10	12	13	25
$p(x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

0.5, 0.2, 0.7, 0.1.

21. A resistência (em toneladas) de vigas de concreto produzidas por uma empresa, comporta-se conforme a função de probabilidade abaixo:

Resistência	2	3	4	5	6
p_i	0.1	0.1	0.4	p	0.2

a) determine p.

b) seja a variável X: resitência das vigas, determine $E(X)$ e $V(X)$.

c) admita que essas vigas são aprovadas para uso em construções se suportam pelo menos 3 toneladas. De um grande lote fabricado pela empresa escolhemos 15 vigas ao acaso. Qual a probabilidade de todas serem aptas para construções? Qual a probabilidade de no mínimo 13 serem aptas?

resp: 0.2, 4.3 e 1.41, 0.206 e 0.816

22. Das variáveis abaixo descritas, assinale quais são binomiais, e para essas dê os respectivos campos de definição (domínio) e função de probabilidade. Quando julgar que a variável não é binomial, aponte as razões de sua conclusão.

a) de uma urna com 10 bolas brancas e 20 pretas, vamos extrair, com reposição, cinco bolas. X é o número de bolas brancas nas cinco extrações;

b) refaça o problema anterior, mas dessa vez as n extrações são sem reposição;

c) temos 5 urnas com bolas pretas e brancas e vamos extrair uma bola de cada urna. Suponha que X seja o número de bolas brancas obtidas no final;

d) vamos realizar uma pesquisa em 10 cidades brasileiras, escolhendo ao acaso um habitante de cada uma delas e classificando-o em pró ou contra um certo projeto federal. Suponha que X seja o número de indivíduos contra o projeto no final da pesquisa;

e) em uma indústria existem 100 máquinas que fabricam determinada peça. Cada peça é classificada como boa ou defeituosa. Escolhemos ao acaso um instante de tempo e verificamos uma peça de cada uma das máquinas. Suponha que X seja o número de peças defeituosas.

23. Se $X \sim$ binomial(n, p), sabendo-se que $E(X) = 12$ e $\sigma^2 = 3$, determinar:

a) n e p; b) $P(X < 15)$; c) $P(X \geq 14)$; d) $E(Z)$ e $V(Z)$, onde $Z = (X - 12)/\sqrt{3}$;

resp: 16 e 3/4, 0.936523, 0.06347644, -5.071797 e 1.

24. Em um experimento binomial com 3 repetições a probabilidade de se obter 2 sucessos é igual a doze vezes a probabilidade de se obter 3 sucessos. Determine a probabilidade de sucesso e a probabilidade de fracasso.

resp: 0.2, 0.8.

24. Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com média de oito chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que se tenha:

a) duas ou mais chamadas em um minuto;

b) menos que três chamadas em um minuto;

c) entre sete (inclusive) e nove (exclusive) chamadas em um minuto;

d) mais que duas chamadas em 30 segundos.

resp: 0.9969808, 0.01375396, 0.2791731, 0.90842180.

25. Num certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem cortes a uma taxa de um por 2000 pés. Qual a probabilidade de que um rolo com 2000 páés de fita magnética tenha:

a) nenhum corte;

b) no máximo dois cortes;

c) pelo menos dois cortes;

resp: 0.3678794, 0.9196986, 0.2642411.

26. As notas de Estatística dos alunos de determinada universidade distribuem-se de acordo com uma distribuição normal, com média 6.4 e desvio padráo 0.8. O professor atribui graus A, B e C da seguinte forma:

Nota	Grau
$x < 5$	C
$5 \leq x < 7.5$	B
$7.5 \leq x \leq 10$	A

Numa classe de 80 alunos, qual o número esperado de alunos com grau A, B e C?

resp: 3.2, 69.97, 6.83.

27. O peso bruto de latas de conserva é uma v.a. normal, com média 1000 g e desvio padráo 20 g.

a) qual a probabilidade de uma lata pesar menos de 980 g?

b) qual a probabilidade de uma lata pesar mais de 1010 g?

resp: 0.15866, 0.30854.

28. Uma máquina de empacotar um determinado produto apresenta variações de peso com desvio padráo de 20 g. Em quanto deve ser regulado o peso médio do pacote para que apenas 10% tenham menos de 400 g?

resp: 425.6 g.

29. Determinar a área limitada pela curva normal padrão em cada um dos casos abaixo:

a) entre $z = 0$ e $z = 1.2$;

b) entre $z = -0.68$ e $z = 0$;

c) entre $z = 0.46$ e $z = 2.21$;

d) entre $z = -0.81$ e $z = 1.94$;

e) à esquerda de $z = -0.6$;

f) à direita de $z = -1.23$;

g) à direita de $z = 2.05$ e à esquerda de $z = 1.44$;

h) entre $z = -1$ e $z = 1$;

i) entre $z = -1.96$ e $z = 1.96$;

j) entre $z = -2.56$ e $z = 2.56$.

resp: 0.3848, 0.2517, 0.3092, 0.7648, 0.2743, 0.8907, 0.9453, 0.68, 0.95, 0.99.

30. Em indivíduos sadios, o consumo renal de oxigênio tem distribuição normal de média 12 cm^3/min e desvio padráo 1,5 cm^3/min.

a) determinar a proporção de indivíduos sadios com consumo: inferior a 10 cm^3/min; superior a 8 cm^3/min; entre 9,4 e 13,2 cm^3/min; igual a 11,6 cm^3/min;

b) determinar o valor do consumo renal que é superado por 98,5% dos indivíduos sadios;

c) determinar uma faixa simétrica em torno do valor médio que contenha 90% dos valores do consumo renal.

resp: 0.0918, 0.9962, 0.7463 e 0, 8.745 cm^3/min, 9.5325 a 14.4675.