Tempo de Espera
Paradoxo e Aplicações

Prof. Laura
Imecc - UNICAMP

PROBLEMA 1 - ESPERANDO O ÔNIBUS

Você vai pegar a Linha 39, que sai do terminal, em média, a cada 60 minutos.

Quanto tempo, em média, você vai ter que esperar no ponto de ônibus?

PROBLEMA 1 - ESPERANDO O ÔNIBUS

Pela informação, às vezes o ônibus demora mais, às vezes, menos. Em média, demora 60 minutos.

Analisemos alguns casos.

PROBLEMA 1 - ESPERANDO O ÔNIBUS

Você poderia chegar no ponto de ônibus e ver o ônibus acabando de ir embora: neste caso vai ter que esperar em média mais 60 minutos.

PROBLEMA 1 - ESPERANDO O ÔNIBUS

Ou o ônibus poderia passar bem no momento em que você chega no ponto: neste caso, você não vai ter que esperar nada.

Ou qualquer outra coisa entre um caso e o outro.

PROBLEMA 1 - ESPERANDO O ÔNIBUS

Em média, quanto você acha que terá que esperar?

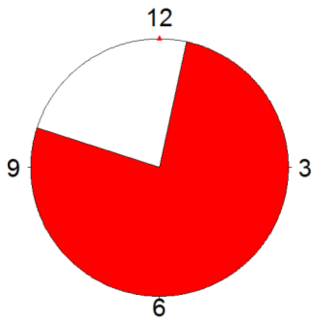
10 minutos parece razoável? 60?

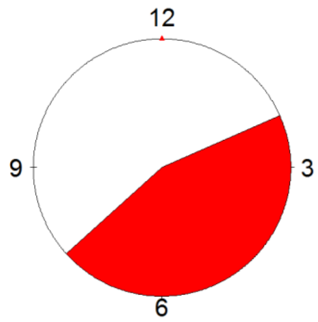
30 (já que está bem no meio)?

PROBLEMA 2 - APOSTAS NO RELÓGIO

Sorteie dois pontos em um relógio, dividindo o placar em duas regiões, como na figura.

A região da Casa é a branca, que contém o número 12, e a sua é a vermelha.





Ganha o jogo quem tiver ficado com a região maior.

SIMULAÇÃO DO JOGO

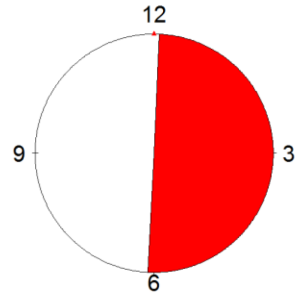
A simulação pode ser feita sorteando números entre 1 e 60, como se fossem os minutos no relógio.

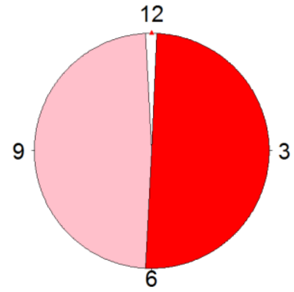
Clique aqui para simular o jogo, em R, ou executando o programa na internet.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Suponha que o 1º número sorteado foi 1.

Então você ganha se o 2º for qualquer número entre 31 e 60, indicados na região rosa,



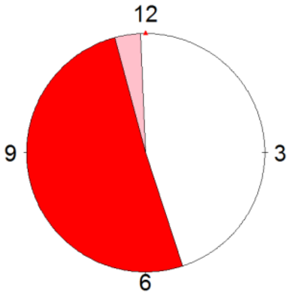


o que ocorre com probabilidade quase igual a ½.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Agora suponha que o 1º número sorteado foi 27.

Então você só ganha se o 2º número estiver entre 57 e 60,



o que ocorre com probabilidade quase zero.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

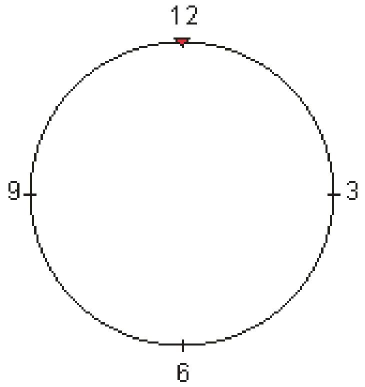
Ou seja, dependendo do primeiro número sorteado, no melhor dos casos sua probabilidade de ganhar é quase ½, e no pior, a probabilidade é quase zero.

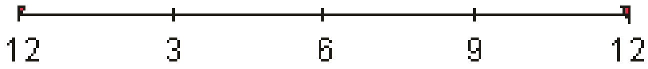
Como o 1º número pode ser qualquer um, sua probabilidade de ganhar o jogo é o ponto médio destas probabilidades, igual a ¼ .

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Outra forma de pensar o problema é graficando os possíveis resultados do sorteio.

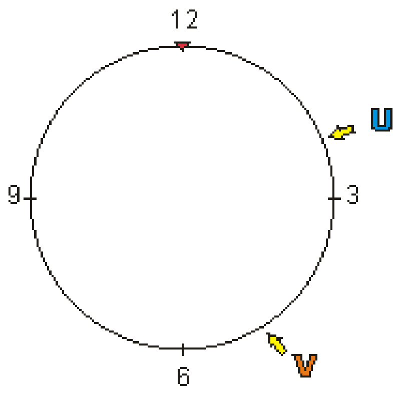
Para isso, corte o relógio no 12 e abra o círculo:

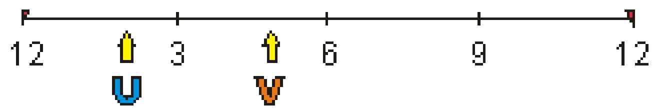




SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

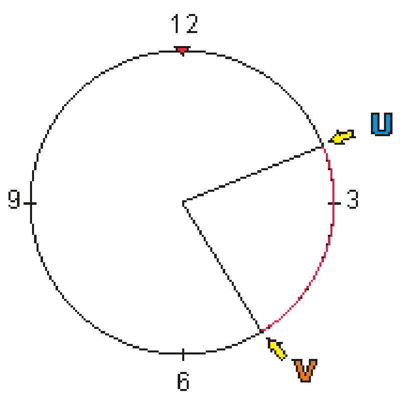
Selecionar dois pontos, U e V, no círculo é o mesmo que selecionar dois pontos no segmento:

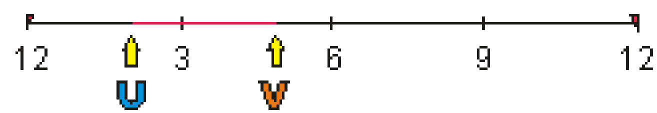




SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

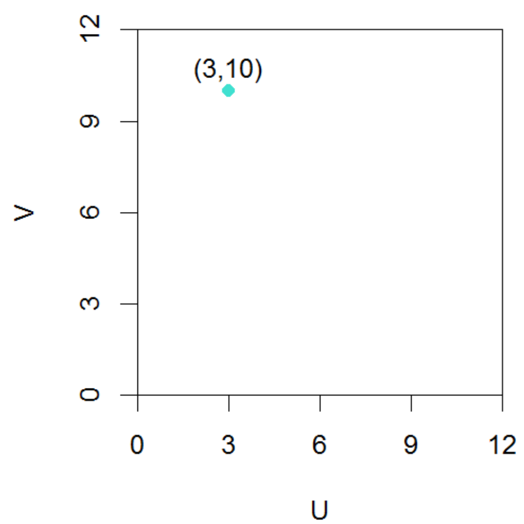
Você só ganha se a distância entre U e V for mais da metade do segmento:





SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

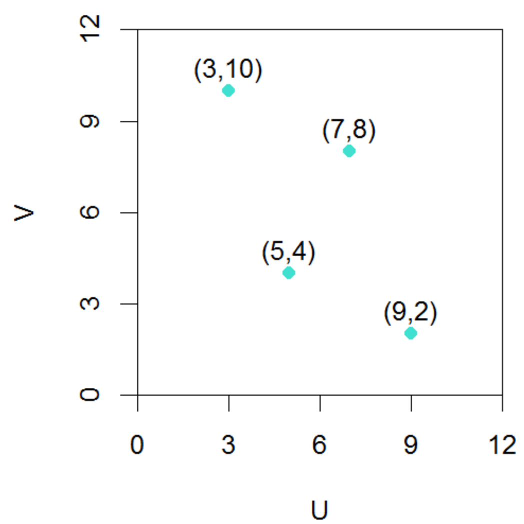
Podemos representar U e V em um plano cartesiano. Por exemplo, se U =3 e V=10, temos



SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

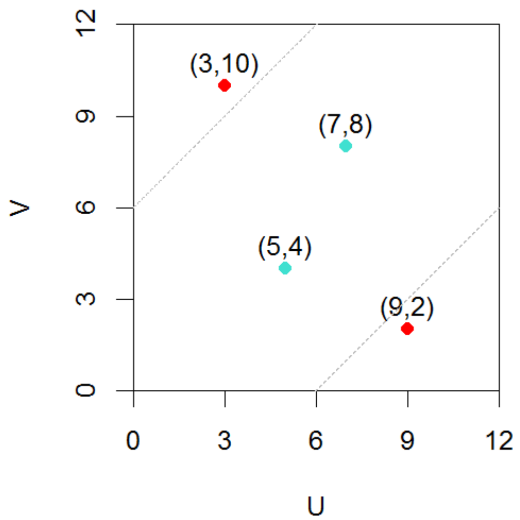
Ou quaisquer outros pares.

Com quais destes você ganha o jogo?



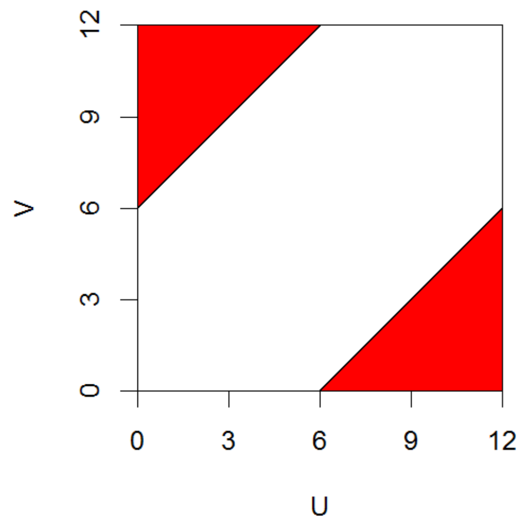
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Com aqueles cujas coordenadas distam mais de 6:



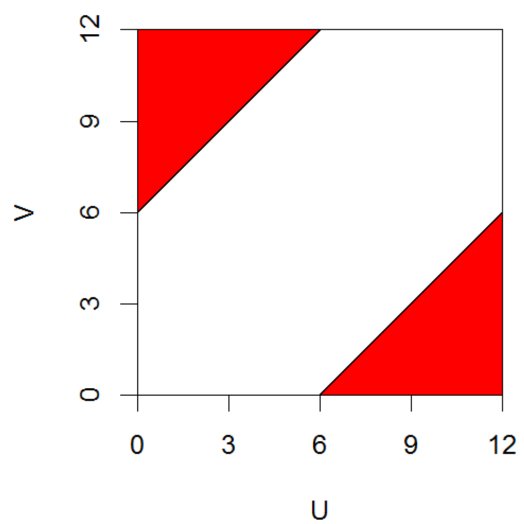
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

A região vermelha mostra todos os pontos (U,V) com os quais você ganha o jogo.



SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Como os pontos são escolhidos em qualquer parte do quadrado, a probabilidade de (U,V) estar na área vermelha é ¼ , pois ela tem ¼ da área total.

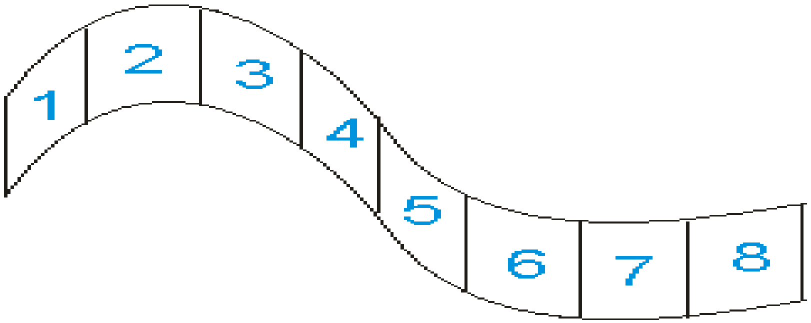


PROBLEMA 3 - JOGO DA TRILHA

Você vai avançar por uma trilha com 8 casas, de acordo com o resultado do lançamento de um dado.

O jogo termina quando você alcança a última casa.

Qual conjunto é mais provável para o resultado do último lançamento?



A={1,2,3}   B={4}

C={5,6}

SIMULAÇÃO DO JOGO

A simulação pode ser feita lançando um dado.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Um possível resultado dos lançamentos do dado é:

2, 5, 3

Neste caso, o último lançamento foi 3, ocorrendo o conjunto A.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Analisemos o problema condicionalmente.

Suponhamos que você já está na casa 7. O próximo lançamento será o último, podendo ser 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Se você estiver na casa 6, o próximo lançamento só será o último se obtiver 2, 3, 4, 5, 6 no dado.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Se você estiver na casa 5, o próximo lançamento só será o último se obtiver 3, 4, 5, 6 no dado.

Se estiver na casa 4, você precisa de 4, 5, 6 no dado.

Se estiver na casa 3, o dado deve cair em 5 ou 6.

Finalmente, se estiver na casa 2, o dado deve cair em 6.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Com isto vemos que:

a) 6 pode ser o último lançamento, se você estiver na casa 2, 3, 4, 5, 6 ou 7.

b) 5 pode ser o último lançamento, se você estiver na casa 3, 4, 5, 6 ou 7.

c) assim por diante, até 1, que poderá ser o último lançamento somente se você estiver na casa 7.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Portanto, o valor 6 é mais provável que o valor 1, de cair no último lançamento.

Se fizermos todas as contas, as probabilidades de cada valor no último lançamento são

último resultado	probabilidade
1	0,042
2	0,102
3	0,154
4	0,198
5	0,236
6	0,268

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Portanto, as probabilidade de cada conjunto são:

a) $P(A) = P\{1,2,3\} = 0,298$

b) $P(B) = P\{4\} = 0,198$

c) $P(C) = P\{5,6\} = 0,504$

DISCUSSÃO DOS PROBLEMAS 2 E 3

Nestes dois problemas:

(a) fixamos um ponto (12 ou a casa 8), e

(b) sorteamos alguma coisa (dois pontos no relógio ou o total de passos na trilha).

Agora pensemos ao contrário.

DISCUSSÃO DOS PROBLEMAS 2 E 3

Ou seja, no lugar de analisar os valores sorteados, pensemos no valores fixos.

DISCUSSÃO DOS PROBLEMAS 2 E 3

Ao sortear os dois pontos no relógio, obtendo duas regiões, em qual região é mais provável que o 12 esteja: na maior ou na menor?

DISCUSSÃO DOS PROBLEMAS 2 E 3

Ao caminhar pela trilha em passos grandes ou pequenos, com quais passos é mais provável passar por cima da casa 8: passos grandes ou pequenos?

VOLTANDO AO PROBLEMA 1

O ônibus demora para passar um intervalo de tempo maior ou menor de 20 minutos (com duração média de 20 minutos).

Em quais intervalos é mais provável que você chegue no ponto de ônibus: intervalos grandes ou pequenos?

VOLTANDO AO PROBLEMA 1

Disto, concluímos que, em média, você vai ter que esperar mais de 10 minutos, contrariando nossa intuição inicial.

Daí o nome: paradoxo do tempo de espera.

APLICAÇÃO

Suponha que você queira conhecer quanto gasta cada cliente de um certo supermercado e pra isso você quer estimar o gasto médio por cliente.

Você decide então fazer a seguinte amostragem: observar o valor gasto por clientes que estão no caixa em alguns horários escolhidos por você.

APLICAÇÃO

Você pode sortear os horários ou escolher os que achar melhor, por exemplo, 10h, 12h30, 17h e 21h.

Nos horários escolhidos, você anota em uma planilha o valor que cada caixa recebeu do cliente que está passando as compras naquele momento.

APLICAÇÃO

Este procedimento de amostragem permite estimar corretamente o valor médio gasto pelos clientes?

APLICAÇÃO

Alguns clientes demoram mais no caixa e outros menos.

Quais clientes são mais prováveis de serem selecionados em sua amostragem?

APLICAÇÃO

Quais clientes demoram tipicamente mais no caixa, os que gastam mais ou os que gastam menos?

APLICAÇÃO

Em outras palavras, o mesmo problema do relógio, da trilha e do ônibus volta a aparecer aqui:

> este tipo de amostragem tende a selecionar clientes que demoram mais, e que tipicamente gastam mais, superestimando o valor médio das vendas.

APLICAÇÃO

Observação: o problema da a amostragem do supermercado ocorreu na vida real.

Veja que se você fizer a amostragem selecionando pontos no rolo de papel das vendas de cada caixa, o problema se repete de novo.

Ele também pode ocorrer em amostragens para estimar tempo de vida útil de certos equipamentos, por exemplo.

REFERÊNCIAS

- David, H.A. (1973) Waiting Time Paradoxes and Order Statistics. *JASA* 68 (343) 743-5.
- Feller, D. (1966) *An introduction to probability theory and its applications*, Vol II. Wiley.
- Rifo, L. (2007) A outra face da moeda honesta. *Revista do Professor de Matemática*, 64, 5-7.
- Rifo, L. (2009) Probabilidades e decisões. *Revista do Professor de Matemática*, 68, 30-32.
- Rifo, L. (2010) Apostas no relógio. *M3 Matemática Multimídia*. Clique aqui para acessar o experimento.
- Rifo, L. (2010) Jogo da trilha. *M3 Matemática Multimídia*. Clique aqui para acessar o experimento.