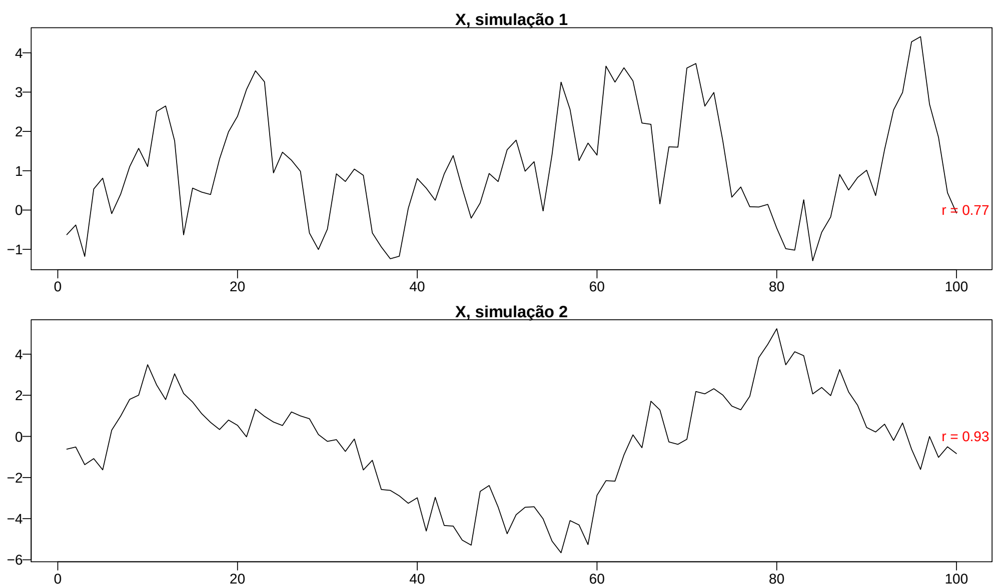
CE063 - Lista de exercícios da aula 4

Paulo Justiniano Ribeiro Jr e Elias T. Krainski

Março, 2019

1) Considere que X_1, X_2, …, X_n é uma série temporal com - $X_1 \sim \text{N}(0, \sigma^2)$, isto é, $X_1 = 0 + e_1$; e - $X_i \sim \text{N}(\rho X_{i-1}, \sigma^2)$, para $i = 2, \ldots, n$, isto é, $X_i = \rho X_{i-1} + e_i$. - $e_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i = 1, 2, ..., n$. Simulando desse modelo duas vezes e visualizando:

```r
sigma <- 1; rho <- 0.9; n <- 100; x <- numeric(n)
par(mfrow=c(2,1), mar=c(2,2,1,0.5), mgp=c(1.5,0.5,0), las=1)
for (sim in 1:2) {
  x[1] <- rnorm(1, 0, sigma)
  for (i in 2:n)
    x[i] <- rnorm(1, rho*x[i-1], sigma)
  plot.ts(x, main=paste('X, simulação', sim), xlab='', ylab='')
  text(n+1, 0, paste('r =', format(cor(x[2:n], x[1:(n-1)]), dig=2)), col=2, lwd=2)
}
```



Observamos que o coeficiente de correlação empírica, r, entre valores de x_i e x_{i-1} em cada uma das séries simuladas é próximo de ρ=0.9, mas não necessariamente igual.

a. (Autocorrelação). Se $\text{Cov}(aX,bY) = ab\text{Cov}(X,Y)$, temos que $\text{Cov}(X_{i-1}, X_i) = \text{Cov}(X_{i-1}, \rho X_{i-1}) = \rho\text{Var}(X)$. Também $\text{Cor}(X,Y)$=$\text{Cov}(X, Y)/(\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)})$, temos que $\text{Cor}(X_{i-1}, X_i)$=$\text{Cor}(X_{i-1}, \rho X_{i-1} + e_i)$=$\text{Cor}(X_{i-1}, \rho X_{i-1}) = \rho\text{Var}(X)/(\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(X)})$=$\rho\text{Var}(X)/\text{Var}(X)$=$\rho$. Usando esses resultados, calcule a correlação entre X_{i-2} e X_i.

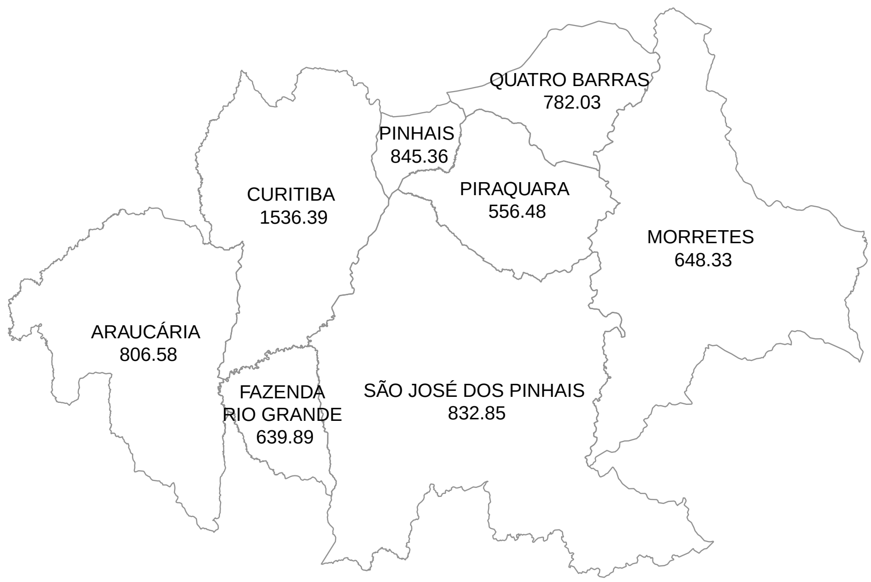
b. (Distribuição teórica t, sob $H_0 : \rho = 0$, e distribuições de t observadas). Se a correlação entre X e Y, duas variáveis aleatórias com distribuição Normal, é zero, então a estatística

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

tem distribuição t-Student com $n - 2$ graus de liberdade. Considere alguns valores de ρ (use $\rho = \{0, 0.1, 0.2, 0.3\}$). Para cada um, simule várias séries temporais, calcule a estatística t para cada série temporal simulada, faça o histograma dessas estatísticas e compare com a distribuição t-Student com $n-2$ graus de liberdade. Interprete esses quatro histogramas.

c. (Distribuição empírica de r sob $H_0 : \rho = 0$). Considere uma das séries temporais simuladas na primeira figura. Mesmo que a correlação entre dois valores em tempos vizinhos seja aproximadamente 0.9, é razoável considerar que a correlação entre tempos razoavelmente distantes é próxima de zero. Assim, o coeficiente de correlação empírico r entre os valores da série (de 1 até n) e entre outros n valores dessa série selecionados em ordem aleatória (ou simplesmente embaralhados), é, provavelmente, próximo de zero. Faça este procedimento várias vezes, visualize o histograma dos valores de r obtitos e compare com o valor de r serial observado, isto é, entre $x_{2:n}$ e $x_{1:(n-1)}$. Interprete.

2) Na figura a seguir temos a renda média *per capita* nos municípios identificados, no ano de 2010.



a. Calcule o índice de autocorrelação espacial de Moran, dado por

$$\hat{I} = \frac{n}{\sum_{i,j} \mathbf{W}_{i,j}} \frac{\sum_{i,j} \mathbf{W}_{i,j} z_i z_j}{\sum_i z_i^2}$$

- $z_i = x_i - \overline{x}$, com x_i sendo a renda média per-capita no município i.
- $\mathbf{W}$ é a matriz de vizinhança ponderada, quadrada de ordem n tal que

$$\mathbf{W}_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1/n_i & \text{se a área } i \text{ é vizinha da área } j \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

onde n_i é o número de vizinhos da área i.

b. Aleatorize os 8 valores e calcule novamente $\hat{I}$. Repita este procedimento várias vezes, faça um histograma e compare com o valor de $\hat{I}$ calculado para os dados originais. Interprete.

c. Considere a renda média *per capita* de FAZENDA RIO GRANDE como 1000 e refaça o teste anterior