

# Verossimilhança para modelos para variáveis transformadas

PJ

24 de setembro de 2015

## Densidade de variável transformada

Seja uma v.a.  $Y$  com f.d.p.  $f_Y(y)$  e uma transformação dada por uma função monótona  $Y^* = h(Y)$ . A f.d.p. de  $Y^*$  é dada por:

$$f_{Y^*}(y^*) = f_Y(h^{-1}(y^*)) \left| \frac{dY}{dY^*} \right|,$$

equivalentemente

$$f_Y(h^{-1}(y^*)) = f_{Y^*}(y^*) \left| \frac{dY}{dY^*} \right|^{-1}.$$

Daqui em diante denotamos:

$$J = \left| \frac{dY}{dY^*} \right|.$$

## Função de verossimilhança

Consideramos aqui que  $Y$  denota um conjunto de dados (variável resposta) na escala original e modelos em que assume-se uma densidade conhecida para  $Y^*$ . Para fins de comparação de modelos (com e sem transformação) é necessário obter a verossimilhança em uma escala comum, ou seja, na escala da variável original.

Considerando-se observações pontuais e independentes, a função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta; y) \equiv f(y; \theta) = \prod_{i=1}^n f_Y(y_i) = \prod_{i=1}^n f_{Y^*}(y_i^*) (J_i)^{-1}$$

e a log-verossimilhança

$$\begin{aligned} l(\theta; y) &= \sum_{i=1}^n \log(f_Y(y_i)) = \sum_{i=1}^n [\log(f_{Y^*}(y_i^*)) - \log(J_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n \log(f_{Y^*}(y_i^*)) - \sum_{i=1}^n \log(J_i) \\ &= l(\theta; y^*) - \sum_{i=1}^n \log(J_i) \end{aligned}$$

Ou seja, na prática, obtém-se a verossimilhança para o modelo ajustado com a variável transformada e subtrai-se a soma dos log-Jacobianos para as observações individualmente.

## Transformação Box-Cox

A transformação Box-Cox é dada por:

$$Y^* = \begin{cases} \frac{Y^\lambda - 1}{\lambda} & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \log(Y) & \text{se } \lambda = 0 \end{cases},$$

e portanto a transformação inversa  $h^{-1}(\cdot)$  fica

$$Y = \begin{cases} (\lambda Y^* + 1)^{(1/\lambda)} & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \exp\{Y^*\} & \text{se } \lambda = 0 \end{cases},$$

o Jacobiano

$$J = \begin{cases} (\lambda Y^* + 1)^{(1/\lambda)-1} & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \exp\{Y^*\} & \text{se } \lambda = 0 \end{cases},$$

e o log-Jacobiano utilizado no cálculo da log-verossimilhança é:

$$\log(J) = \begin{cases} (\frac{1}{\lambda} - 1) \log(\lambda Y^* + 1) & \text{se } \lambda \neq 0 \\ Y^* & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}.$$

## Modelos de independência condicional

Esta classe é muito utilizada para modelar observações que são correlacionadas. Nesta classe de modelos, assume-se que, as observações  $y_i$  são independentes dado o valor  $x_i$  de uma variável latente. Desta forma a estrutura de dependência é dada assumindo-se uma distribuição multivariada para  $x$ , tipicamente assume-se uma normal multivariada. Desta forma para um vetor  $y^*$  de observações e densidade fica

$$f(y^*) = f(x) \cdot \prod_{i=1}^n f(y_i^* | x_i)$$

em que  $f(x)$  é a distribuição multivariada que define a estrutura de dependência. A verossimilhança para modelos de efeitos latentes é dada para distribuição conjunta das variáveis aleatórias (observadas e latentes) integrada em relação à variável latente.

$$L(\theta; y) = \int f_{X,Y}(x, y) dx = \int f_X(x) f_Y(y|x) dx = \int f_X(x) \prod_{i=1}^n f_Y(y_i | x_i) dx.$$

Para o modelo de variável transformada obtém-se então a verossimilhança

$$\begin{aligned} L(\theta; y) &= \int f_X(x) \prod_{i=1}^n f_{Y^*}(y_i^* | x_i) J_i^{-1} dx \\ &= \left[ \int f_X(x) \prod_{i=1}^n f_{Y^*}(y_i^* | x_i) dx \right] \prod_{i=1}^n J_i^{-1} \\ &= L(\theta; y^*) \prod_{i=1}^n J_i^{-1}, \end{aligned}$$

e log-verossimilhança fica da seguinte forma:

$$l(\theta; y) = l(\theta; y^*) - \sum_{i=1}^n J_i.$$

Assim como anteriormente, obtém-se a verossimilhança para o modelo ajustado com a variável transformada e simplesmente subtrai-se a soma dos log-Jacobianos para as observações individualmente.

**Exercício 1:** distribuição para a transformação de uma variável aleatória

Seja um conjunto de dados abaixo aos quais se ajustou uma distribuição normal à uma transformação Box-Cox destes dados com  $\lambda = 0,2$ .

1. Obter a verossimilhança maximizada para os dados na escala transformada.
2. Obter a verossimilhança maximizada para os dados na escala original.
3. Comparar o ajuste dos dados com ajustes: da distribuição normal, da distribuição log-normal e da distribuição gamma (as dados originais)

5,0	9,5	9,8	7,4	18,2	8,3	7,0	8,2	7,4	4,9
12,5	15,3	8,9	12,2	22,2	1,0	8,9	7,3	4,6	3,9

**Exercício 2:** Ajustar modelo transformado (Box-Cox) para os dados fornecidos no curso (regressão)

**Exercício 3:** Procurar uma outra família de transformação de variáveis e desenvolver os resultados para obter ajuste e verossimilhança na escala dos dados originais.