Introdução à Probabilidade

Silvia Shimakura

silvia.shimakura@ufpr.br

Probabilidade

- **O que é probabilidade?**

  Medida que quantifica a incerteza frente a um acontecimento futuro.

- **Como quantificar incerteza?**

  Definição clássica: relaciona eventos favoráveis com eventos possíveis.
  Definição frequentista: baseada em repetições de um experimento, sob condições semelhantes, um grande número de vezes.

Problema trivial 1

- Experimento 1: Lançamento de um dado balanceado

- Espaço amostral: conjunto dos resultados possíveis

$$E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Evento A: face impar e menor que 5

$$A=\{1, 3\}$$

- Evento B: face par

$$B=\{2, 4, 6\}$$

Cálculo de probabilidades

- Experimento 1: eventos simples são equiprováveis

- Probabilidade: número de resultados favoráveis ao evento de interesse dividido pelo número total de eventos possíveis

- Experimento 1:

$$P(A) = 2/6 \qquad P(B) = 3/6$$

Problema trivial 2

- Experimento 2: Lançamento de 2 dados balanceados

- Espaço amostral: 6x6=36 elementos

- Evento F: a soma dos dois valores é 10

$$F=\{(4,6), (5,5), (6,4)\}$$

- Evento G: os dois valores são iguais

$$G=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

- Evento H: os dois valores são pares

$$H=\{(2,2), (4,4), (6,6)\}$$

Cálculo de probabilidades

- Experimentos 2: eventos simples são equiprováveis

- Probabilidade: número de resultados favoráveis ao evento de interesse dividido pelo número total de eventos possíveis

- Experimento 2:

$$P(F)=3/36 \quad P(G)=6/36 \quad P(H)=3/36$$

Problema menos trivial

- Experimento 3: Lançamento de uma moeda
- Espaço amostral: E={Cara, Coroa}
- Evento C: Cara

  C={Cara}
- Eventos simples são equiprováveis?
- P(C)=?

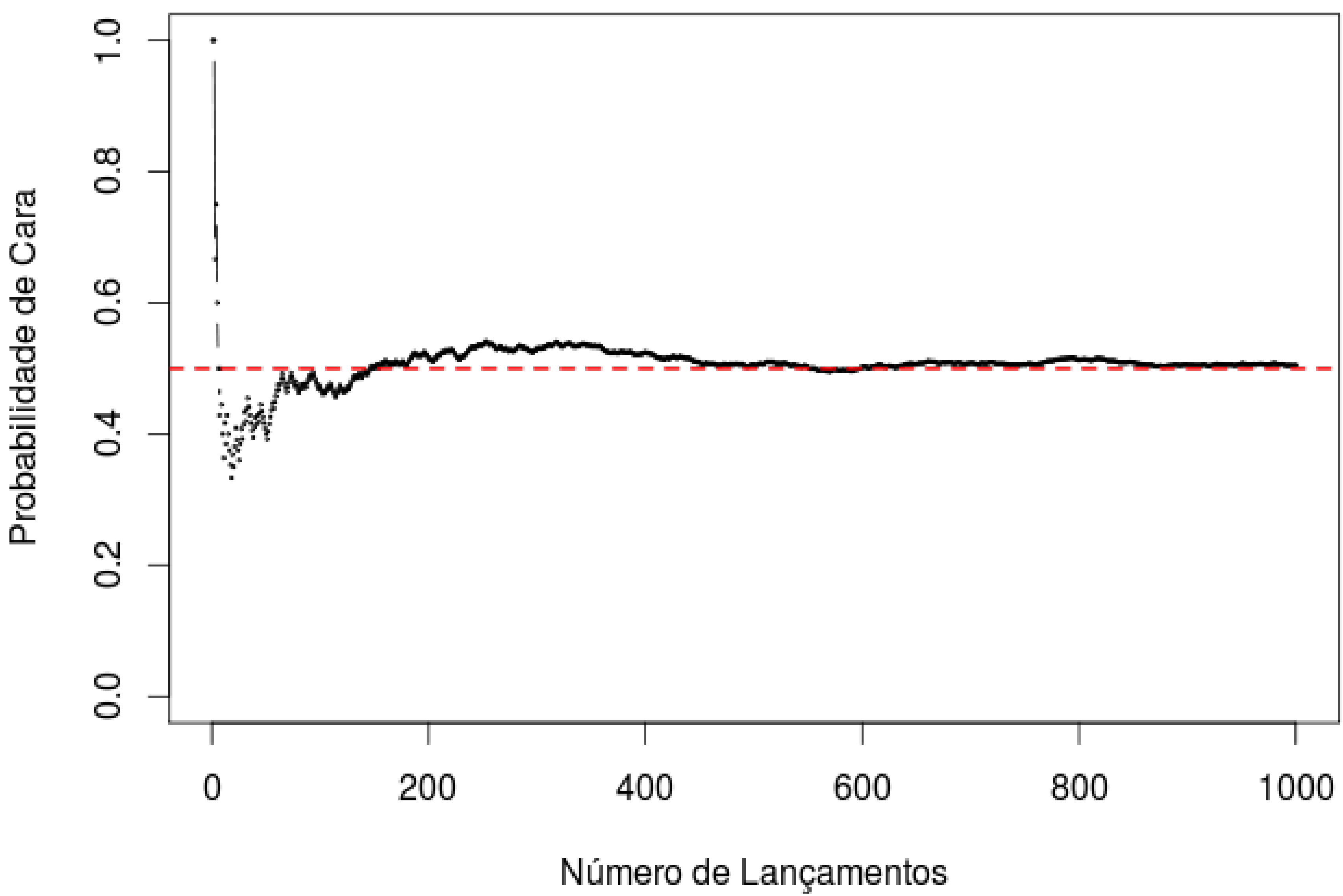
Visão frequentista de probabilidade

- E se os eventos simples não forem equiprováveis?
- Probabilidade: frequência relativa de ocorrência do evento para um grande número de sorteios

Frequência relativa

- C: Cara   O: Coroa

Resultado	C	C	C	O	C	O	O	O	O	O	O	C
Frequência acumulada de Caras	1	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5
Número de lançamentos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Freq. relativa de caras	1/1	2/2	3/3	3/4	4/5	4/6	4/7	4/8	4/9	4/10	4/11	5/12
%	100	100	100	75	80	67	57	50	44	40	36	42



Probabilidade de Cara
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
200
400
600
800
1000
Número de Lançamentos

Tipos especiais de eventos

- Evento interseção: ocorrência de A e B

  $A=\{1, 2, 3, 4\}$ $B=\{3, 4, 5, 6\}$ $A \cap B=\{3, 4\}$

- Evento união: ocorrência de A ou B ou ambos

  $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Evento complementar de A: contém todos os elementos do espaço amostral que não pertencem a A

  $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\bar{A}=\{5,6\}$

Tipos especiais de eventos

- Eventos mutuamente exclusivos: ocorrência de um evento impossibilita a ocorrência do outro

$$A=\{1, 2\} \quad B=\{3, 4, 5, 6\} \quad A\cap B=\emptyset$$

Propriedades de probabilidade

- $0 \leq P(A) \leq 1$, para qualquer evento A

- $P(E)=1$, em que E é o espaço amostral

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

- Para dois eventos A e B quaisquer, a probabilidade de que A ou B ocorra:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Se A e B são mutuamente exclusivos, a probabilidade de que A ou B ocorra é a soma das probabilidades.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Probabilidade condicional

- É a probabilidade de B dado que A ocorreu.

  Notação: $P(B|A)$

- Para A e B quaisquer

$$P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)$$
$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A)$$

- Para A e B independentes

$$P(B|A) = P(B)$$
$$P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$$

Exemplo

- Lançamento de dois dados não viciados
- Espaço amostral: 36 elementos com prob 1/36 cada
- Evento B: soma dos dados é 8
- B=?
- P(B)=???

Exemplo (cont.)

- Sabendo que o resultado do primeiro dado é 3, qual será a probabilidade da soma dos dois dados ser 8?

- Evento A: primeiro dado é 3

  A={(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)} → P(A)=6/36

- Evento B:

  B={(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)} → P(B)=5/36

- Evento interseção: A∩B={(3,5)} → P(A∩B)=1/36

- P(B|A)=? A e B são independentes? A e B são mutuamente exclusivos?

Exemplo: Distribuição de peso e pressão arterial

Pressão arterial	Peso			
	Excesso	Normal	Deficiente	Total
Elevada	0,10	0,08	0,02	0,2
Normal	0,15	0,45	0,20	0,8
Total	0,25	0,53	0,22	1

- Probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter pressão elevada?

- Probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter pressão elevada e excesso de peso?

- Sabendo que a pessoa tem excesso de peso, qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter pressão elevada?

Exemplo: Distribuição de peso e pressão arterial (cont.)

- Peso em excesso e pressão arterial normal são eventos mutuamente exclusivos?

- Pressão arterial e peso são independentes?

Pressão arterial	Peso			
	Excesso	Normal	Deficiente	Total
Elevada	0,10	0,08	0,02	0,2
Normal	0,15	0,45	0,20	0,8
Total	0,25	0,53	0,22	1

Exemplo: Qualidade de teste diagnóstico

- Suponha que existam dois estados de saúde mutuamente exclusivos e exaustivos: D+ doente e D- não doente

- Seja T+ teste positivo e T- teste negativo

- Num estudo sobre o teste ergométrico, Wriner et al. (1979) compararam os resultados obtidos entre indivíduos com e sem doença coronariana.

- T+: mais de 1mm de depressão ou elevação do segmento ST, por pelo menos 0,08s, em comparação com paciente em repouso.
- D+ e D-: angiografia (teste padrão ouro).

Exemplo: Qualidade de teste disgnóstico

Doença coronariana	Teste Ergométrico					
	T+		T-		Total	
D+	815	a	208	b	1023	a+b
D-	115	c	327	d	442	c+d
Total	930	a+c	535	b+d	1465	n

Temos interesse em responder as perguntas:

- Qual a probabilidade do teste ser positivo dado que o paciente é doente? $P(T+|D+)=$
- Qual a probabilidade do teste ser negativo dado que o paciente não é doente? $P(T-|D-)=$

Exemplo: Qualidade de teste diagnóstico (cont.)

- Qual a probabilidade de que uma pessoa com resultado de teste positivo realmente tenha a doença? $P(D+|T+)=?$

Teorema de Bayes

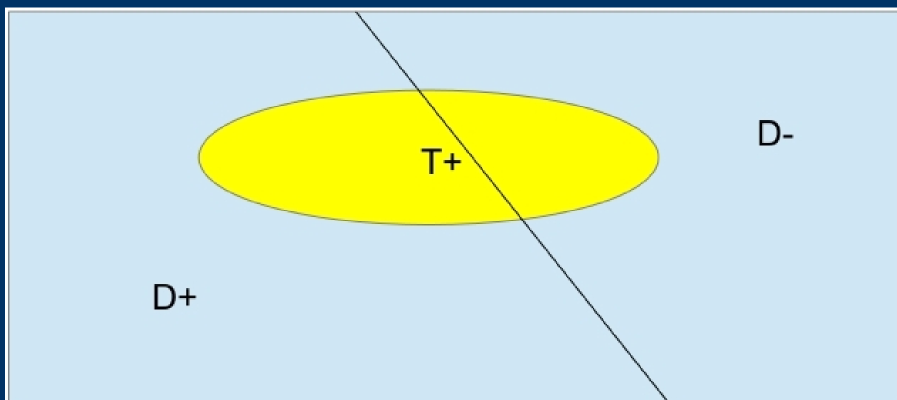
- Se A1, A2, … An são n eventos mutuamente exclusivos e exaustivos, tais que:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

- Pelo Teorema de Bayes:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

Exemplo: Qualidade de teste diagnóstico



- D+ ∩ D- = ∅
- D+ ∪ D- = E
- Conhecidos:
  - P(D+) e P(D-)
  - P(T+|D+) e P(T-|D-)

$$P(D+|T+)=\frac{P(D+)P(T+|D+)}{P(D+)P(T+|D+)+P(D-)P(T+|D-)}$$

$$VPP=P(D+|T+)=\frac{p\,s}{p\,s+(1-p)(1-e)}$$