

CE-003: Estatística II - Turma: K/O, Avaliações Semanais (2º semestre/2012)

1.

- (a) Uma urna contém doze bolas brancas e oito bolas vermelhas. Serão retiradas, sequencialmente, três bolas da urna. A cada bola anota-se a cor e, se a bola for vermelha ela é retornada à urna e se for branca ela é posta de lado.
- Forneça o espaço amostral do experimento.
 - Calcule probabilidade de cada elemento do espaço amostral.
 - Qual a probabilidade de não se obter todas as bolas da mesma cor?
 - Qual a probabilidade de se retirar ao menos duas bolas brancas?
 - Qual a probabilidade de retirar três vermelhas sabendo-se que ao menos uma das bolas é vermelha?
 - Se a primeira bola for branca, qual a probabilidade de obter três bolas brancas?

Solução:

- $\Omega = \{(B, B, B), (B, B, V), (B, V, B), (V, B, B), (B, V, V), (V, B, V), (V, V, B), (V, V, V)\}$
- | Evento | (B, B, B) | (B, B, V) | (B, V, B) | (B, V, V) | (V, B, V) | (V, V, B) | (V, V, V) |
|---------------|---|--|--|--|---|---|---|
| Probabilidade | $\frac{12}{20} \frac{11}{19} \frac{10}{18}$ | $\frac{12}{20} \frac{11}{19} \frac{8}{18}$ | $\frac{12}{20} \frac{8}{19} \frac{11}{18}$ | $\frac{8}{20} \frac{12}{19} \frac{11}{18}$ | $\frac{12}{20} \frac{8}{19} \frac{8}{18}$ | $\frac{8}{20} \frac{12}{19} \frac{8}{18}$ | $\frac{8}{20} \frac{8}{19} \frac{12}{18}$ |
- $P = 1 - P[(B, B, B)] - P[(V, V, V)] = 1 - \frac{12}{20} \frac{11}{19} \frac{10}{18} - \frac{8}{20} \frac{8}{19} \frac{8}{18} = 0.743$
- $P = P[(B, B, B)] + P[(B, B, V)] + P[(B, V, B)] + P[(V, B, B)] = \frac{12}{20} \frac{11}{19} \frac{10}{18} + \frac{12}{20} \frac{11}{19} \frac{8}{18} + \frac{12}{20} \frac{8}{19} \frac{11}{18} + \frac{8}{20} \frac{12}{19} \frac{11}{18} = 0.6326$
- $P = \frac{P[(V, V, V)]}{1 - P[(B, B, B)]} = \frac{\frac{8}{20} \frac{8}{19} \frac{8}{18}}{1 - \frac{12}{20} \frac{11}{19} \frac{10}{18}} = 0.0793$
- $P = \frac{P[(B, B, B)]}{P[(B, B, B)] + P[(B, B, V)] + P[(B, V, B)] + P[(V, B, B)]} = \frac{\frac{12}{20} \frac{11}{19} \frac{10}{18}}{\frac{12}{20} \frac{11}{19} \frac{10}{18} + \frac{12}{20} \frac{11}{19} \frac{8}{18} + \frac{12}{20} \frac{8}{19} \frac{11}{18} + \frac{8}{20} \frac{12}{19} \frac{11}{18}} = 0.3216$

- (b) Um candidato está fazendo uma prova de múltipla escolha com cinco alternativas das quais apenas uma é correta. A chance do candidato saber a solução de uma questão é de 40%. Quando ele sabe a solução ele sempre acerta a questão e quando não sabe ele escolhe uma das respostas ao acaso. Se o candidato acerta a questão, qual a probabilidade de ele saber resolver a questão?

Solução:

Evento S : o candidato sabe a questão
 Evento \bar{S} : o candidato não sabe a questão
 Evento A : o candidato acerta a questão
 Evento \bar{A} : o candidato não acerta a questão Dados:

$$\begin{aligned}
 P[S] &= 0,40 & ; & P[\bar{S}] = 0,60 \\
 P[A|S] &= 1,00 & ; & P[\bar{A}|S] = 0,00 \\
 P[S] &= 0,40 & ; & P[\bar{S}] = 0,60 \\
 P[A|\bar{S}] &= 0,20 & ; & P[\bar{A}|\bar{S}] = 0,80 \\
 P[S|A] &=? \\
 P[S|A] &= \frac{P[S \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A|S] \cdot P[S]}{P[A|S] \cdot P[S] + P[\bar{A}|\bar{S}] \cdot P[\bar{S}]} = \frac{1 \cdot 0,40}{(1 \cdot 0,40) + (0,20 \cdot 0,60)} = \frac{0,40}{0,52} = 0.769
 \end{aligned}$$

2. Estamos interessados nos tempos de processamento para um certo procedimento de tratamento de imagens. O algoritmo de tratamento e classificação das imagens funciona em dois estágios. O primeiro estágio é realizado em 20 segundos e a experiência mostra que a classificação é encerrada nesse estágio para 25% das imagens. As demais são processadas em um segundo estágio e destas, o processamento de 80% delas é encerrado com mais 30 segundos e 60 segundos para as restantes. Defina a variável aleatória (v.a.), forneça sua distribuição de probabilidades, a esperança e a variância da v.a. Informe ainda o tempo que espera-se gastar no processamento de 1500 imagens.

Solução:

Eventos:

 A : Classifica no primeiro estágio \bar{A} : Não classifica no primeiro estágio B : Classifica em 30 seg no segundo estágio \bar{B} : Classifica em 60 segundos no segundo estágio $\Omega = \{(A), (\bar{A}, B), (\bar{A}, \bar{B})\}$

Dados:

$$P[A] = 0,25 \quad P[B|\bar{A}] = 0,80$$

$$P[\bar{A}] = 0,75 \quad P[\bar{B}|\bar{A}] = 0,20$$

$$P[B \cap \bar{A}] = P[B|\bar{A}]P[\bar{A}] = 0,80 \cdot 0,75 = 0,60$$

$$P[\bar{B} \cap \bar{A}] = P[\bar{B}|\bar{A}]P[\bar{A}] = 0,20 \cdot 0,75 = 0,15$$

 X : tempo de processamento (s)

$$x \in \{20, 50, 80\}$$

Evento	(A)	(\bar{A}, B)	(\bar{A}, \bar{B})
x	20	50	80
P[X=x]	0,25	0,60	0,15

$$E(X) = \sum x \cdot P[X = x] =$$

$$= 20(0,25) + 50(0,60) + 80(0,15) = 47s$$

$$\text{Var}(X) = \sum (x - E(X))^2 \cdot P[X = x] =$$

$$= (20 - E(X))^2(0,25) + (50 - E(X))^2(0,60) + (80 - E(X))^2(0,15) = 351s^2$$

$$T = 1500 \cdot E(X) = 70500s = 19.58hr(\text{tempo para processamento de 1500 imagens})$$

3. Seja uma variável aleatória X (v.a.) com função de densidade de probabilidade (f.d.p.) dada por:

$$f(x) = \begin{cases} |1 - x| & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Mostre que $f(x)$ é uma f.d.p..
- (b) Obtenha o valor esperado de X .
- (c) Obtenha a função de distribuição acumulada $F(x)$
- (d) Obtenha $P[X > 1]$.
- (e) Obtenha $P[X < 1,5 | X > 1]$.
- (f) Obtenha $P[X < 0,25 \text{ ou } X > 0,75]$.

Seja ainda Y uma outra v.a. tal que:

$$Y = \begin{cases} 200 & \text{se } x \leq 0,25 \\ 500 & \text{se } 0,25 < x \leq 0,75 \\ 1000 & \text{se } x > 0,75 \end{cases}$$

- (g) Obtenha a função de probabilidade Y .
- (h) Obtenha o valor esperado de Y .
- (i) Obtenha a função de distribuição acumulada $F(y)$
- (j) Obtenha $P[Y = 1000 | Y \geq 500]$.

Solução:

- (a) Mostrar que $f(x) \geq 0 \forall x$ e que $\int_0^2 f(x)dx = 1$.

Notar que:

$$f(x) = |1 - x|I_{(0,2)}(x) = \begin{cases} |1 - x| & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 < x < 1 \\ x - 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$(b) E[X] = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x(1-x)dx + \int_1^2 x(x-1)dx \dots = 1$$

(c)

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x 1-x dx = \frac{x(2-x)}{2} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \int_0^1 1-x dx + \int_1^x x-1 dx = \frac{x^2-2x+2}{2} & \text{se } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$(d) P[X > 1] = 1 - F(1) = 0,5$$

$$(e) P[X < 1,5 | X > 1] = \frac{P[1 < X < 1,5]}{P[X > 1]} = \frac{F(1,5) - F(1)}{1 - F(1)}$$

$$(f) P[X < 0,25 \text{ ou } X > 0,75] = F(0,25) + (1 - F(0,75))$$

Y	200	500	1000
$P[Y = y]$	$P[X \leq 0,25] = F(0,25) = 0.21875$	$P[0,25 < X \leq 0,75] = F(0,75) - F(0,25) = 0.25$	$P[X > 0,75] = 1 - F(0,75) = 0.53125$

(h)

$$E[Y] = \sum yP[Y = y] = 200 \cdot 0.21875 + 500 \cdot 0.25 + 1000 \cdot 0.53125 = 700$$

Y	$y < 200$	$200 \leq y < 500$	$500 \leq y < 1000$	$y \geq 1000$
$F(y) = P[Y \leq y]$	0	0.21875	0.46875	1

$$(j) P[Y = 1000 | Y \geq 500] = \frac{P[Y=1000]}{P[Y=500] + P[Y=1000]} = 17/25 = 0.68.$$

4. Um indivíduo vai participar de uma competição que consiste em responder questões que são lhe são apresentadas sequencialmente. Com o nível de conhecimento que possui, a chance de acertar uma questão escolhida ao acaso é de 75% . Neste contexto, para cada diferente situação apresentada a seguir, defina a variável aleatória, sua distribuição de probabilidades e calcule a probabilidade solicitada. Se preciso, faça suposições necessárias e adequadas em cada caso.

- (a) Se for responder até errar uma pergunta, qual a probabilidade de conseguir acertar quatro ou mais questões?
- (b) Se for responder cinco perguntas, qual a probabilidade de acertar quatro ou mais?
- (c) Se for responder até acertar a terceira pergunta, qual a probabilidade de errar apenas uma?
- (d) Se o candidato selecionar aleatoriamente seis questões de um banco de 40 questões das quais o candidato sabe a resposta de 30 delas (75%), qual a probabilidade de acertar ao menos cinco delas.

Ainda neste contexto considere que o candidato responde, em média, 1,8 questões por minuto.

- (e) Qual a probabilidade de conseguir responder ao menos três questões em três minutos?
- (f) Qual a probabilidade de que o tempo para resposta de uma questão seja superior a 40 segundos?

Solução:

(a)

X : Número de acertos até o primeiro erro
 $X \sim G(0,25)$

$$P[X \geq 4] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - \sum_{i=0}^3 (1-0,25)^i (0,25) = 0.316$$

(b)

X : Número de acertos em cinco perguntas
 $X \sim B(n = 5, p = 0,75)$

$$P[X \geq 4] = P[X = 4] + P[X = 5] = \sum_{i=4}^5 \binom{5}{i} 0,75^i (1-0,75)^{5-i} = 0.633$$

(c)

X : Número de erros até o terceiro acerto

$X \sim \text{BN}(r = 3, p = 0,75)$

$$P[X = 1] = \binom{3+1-1}{3-1} 0,75^3 (1-0,75)^1 = 0.316$$

(d)

X : Número de acertos nas seis questões selecionadas

$X \sim \text{HG}(30, 10, 6)$

$$P[X \geq 5] = P[X = 5] + P[X = 6] = \sum_{i=5}^6 \frac{\binom{30}{i} \binom{10}{6-i}}{\binom{40}{6}} = 0.526$$

(e)

X : Número de questões respondidas em 3 minutos

$X \sim \text{P}(3 \cdot 1,8 = 5,4)$

$$P[X \geq 3] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - \sum_{i=0}^2 \frac{e^{-5,4} 5,4^i}{i!} = 0.905$$

(f)

X : tempo (em min.) para responder uma questão

$X \sim \text{Exp}(\lambda = 1,8)$

$$P[X \geq 40/60] = \int_{40/60}^{\infty} 1,8e^{-1,8x} dx = 0.301$$
