CE-003: Estatística II - Turma: K/O, Avaliações Semanais (2^o semestre/2012)

1.

(a) Uma urna contém doze bolas brancas e oito bolas vermelhas. Serão retiradas, sequencialmente, três bolas da urna. A cada bola anota-se a cor e, se a bola for vermelha ela é retornada à urna e se for branca ela é posta de lado.

i. Forneça o espaço amostral do experimento.
ii. Calcule probabilidade de cada elemento do espaço amostral.
iii. Qual a probabilidade de não se obter todas as bolas da mesma cor?
iv. Qual a probabilidade de se retirar ao menos duas bolas brancas?
v. Qual a probabilidade de retirar três vermelhas sabendo-se que ao menos uma das bolas é vermelha?
vi. Se a primeira bola for branca, qual a probabilidade de obter três bolas brancas?

Solução:

i. $\Omega = \{(B,B,B),(B,B,V),(B,V,B),(V,B,B),(B,V,V),(V,B,V),(V,V,B),(V,V,V)\}$

ii.

Evento	(B,B,B)	(B,B,V)	(B,V,B)	(B,B,V)	(B,V,V)	(V,B,V)	(V,V,B)	(V,V,V)
Probabilidade	$\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18}$	$\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{8}{18}$	$\frac{12}{20}\frac{8}{19}\frac{11}{19}$	$\frac{8}{20}\frac{12}{20}\frac{11}{19}$	$\frac{12}{20}\frac{8}{19}\frac{8}{19}$	$\frac{8}{20}\frac{12}{20}\frac{8}{19}$	$\frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{12}{20}$	$\frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{8}{20}$

iii. $P = 1 - P[(B,B,B)] - P[(V,V,V)] = 1 - \frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18} - \frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{8}{20} = 0.743$

iv. $P = P[(B,B,B)] + P[(B,B,V)] + P[(B,V,B)] + P[(V,B,B)] = \frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18} + \frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{8}{18} + \frac{12}{20}\frac{8}{19}\frac{11}{19} + \frac{8}{20}\frac{12}{20}\frac{11}{19} = 0.6326$

v. $P = \frac{P[(V,V,V)]}{1-P[(B,B,B)]} = \frac{\frac{8}{20}\frac{8}{20}\frac{8}{20}}{1-\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18}} = 0.0793$

vi. $P = \frac{P[(B,B,B)]}{P[(B,B,B)]+P[(B,B,V)]+P[(B,V,B)]+P[(B,V,V)]} = \frac{\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18}}{\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{10}{18}+\frac{12}{20}\frac{11}{19}\frac{8}{18}+\frac{12}{20}\frac{8}{19}\frac{11}{19}+\frac{12}{20}\frac{8}{19}\frac{8}{19}} = 0.3216$

(b) Um candidato está fazendo uma prova de múltipla escolha com cinco alternativas das quais apenas uma é correta. A chance do candidato saber a solução de uma questão é de 40%. Quando ele sabe a solução ele sempre acerta a questão e quando não sabe ele escolhe uma das respostas ao acaso. Se o candidato acerta a questão, qual a probabilidade de ele saber resolver a questão?

Solução:
Evento S : o candidato sabe a questão
Evento $\overline{S}$: o candidato sabe a questão
Evento A : o candidato acerta a questão
Evento $\overline{A}$: o candidato acerta a questão Dados:

$$
\begin{aligned}
P[S] &= 0,40 \quad ; P[\overline{S}] = 0,60 \\
P[A|S] &= 1,00 \quad ; P[\overline{A}|S] = 0,00 \\
P[S] &= 0,40 \quad ; P[\overline{S}] = 0,60 \\
P[A|\overline{S}] &= 0,20 \quad ; P[\overline{A}|\overline{S}] = 0,80 \\
P[S|A] &= ? \\
P[S|A] &= \frac{P[S \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A|S] \cdot P[S]}{P[A|S] \cdot P[S] + P[A|\overline{S}] \cdot P[\overline{S}]} = \frac{1 \cdot 0,40}{(1 \cdot 0,40) + (0,20 \cdot 0,60)} = \frac{0,40}{0,52} = 0.769
\end{aligned}
$$

---

2. Estamos interessados nos tempos de processamento para um certo procedimento de tratamento de imagens. O algoritmo de tratamento e classificação das imagens funciona em dois estágios. O primeiro estágio é realizado em 20 segundos e a experiência mostra que a classificação é encerrada nesse estágio para 25% das imagens. As demais são processadas em um segundo estágio e destas, o processamento de 80% delas é encerrado com mais 30 segundos e 60 segundos para as restantes.

Defina a variável aleatória (v.a.), forneça sua distribuição de probabilidades, a esperança e a variância da v.a. Informe ainda o tempo que espera-se gastar no processamento de 1500 imagens.

Solução:

Eventos:

A : Classifica no primeiro estágio

$\overline{A}$: Não classifica no primeiro estágio

B : Classifica em 30 seg no segundo estágio

$\overline{B}$: Classifica em 60 segundos no segundo estágio

$\Omega = \{(A), (\overline{A}, B), (\overline{A}, \overline{B})\}$

Dados:

$$P[A] = 0,25 \quad P[B|\overline{A}] = 0,80$$

$$P[\overline{A}] = 0,75 \quad P[\overline{B}|\overline{A}] = 0,20$$

$$P[B \cap \overline{A}] = P[B|\overline{A}]P[\overline{A}] = 0,80 \cdot 0,75 = 0,60$$

$$P[\overline{B} \cap \overline{A}] = P[\overline{B}|\overline{A}]P[\overline{A}] = 0,20 \cdot 0,75 = 0,15$$

X : tempo de processamento (s)

$x \in \{20, 50, 80\}$

Evento	(A)	$(\overline{A}, B)$	$(\overline{A}, \overline{B})$
x	20	50	80
P[X=x]	$0,25$	$0,60$	$0,15$

$$\mathrm{E}(X) = \sum x \cdot P[X = x] =$$
$$= 20(0,25) + 50(0,60) + 80(0,15) = 47s$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum (x - \mathrm{E}(X))^2 \cdot P[X = x] =$$
$$= (20 - \mathrm{E}(X))^2(0,25) + (50 - \mathrm{E}(X))^2(0,60) + (80 - \mathrm{E}(X))^2(0,15) = 351s^2$$

$$T = 1500 \cdot \mathrm{E}(X) = 70500s = 19.58hr(\text{tempo para processamento de 1500 imagens})$$
