CE-003: Estatística II - Turma: K/O, Avaliações Periódica, 2o sem. 2017

GRR: ________________ **Nome:** ____ **Turma:** __________

Avaliação 01

1. Uma *playlist* vai ser montada com três músicas selecionadas a partir de uma lista de quatro músicas do(a) artista A, outra lista de três de B e outra de duas de C. A sequência de músicas na *playlist* é montada ao acaso porém não repete músicas e tem uma de cada artista sempre na sequência de A, B e C nesta ordem..
   (a) Explique se e por que a composição da *playlist* pode ser considerada um experimento aleatório.
   (b) Forneça o espaço amostral.
   (c) Caracterize o espaço amostral quanto a ser (i) finito ou infinito, (ii) enumerável ou não enumerável, (iii) equiprovável ou não equiprovável, justificando as respostas.
   (d) Considere o evento "a *playlist* inicia com a segunda música do(a) artista A". Qual o conjunto que define este evento e qual a sua probabilidade de ocorrência?
   (e) Considere o evento "a *playlist* não contém as primeiras músicas das listas de nenhum dos(as) artistas". Qual o conjunto que define este evento e qua a sua probabilidade de ocorrência?
   (f) Qual seria a probabilidade de ocorrência de ambos eventos definidos no itens eventos anteriores?
   (g) E qual seria a probabilidade de ocorrência de algum deles?
   (h) Quantas *playlists* seria possíveis se a ordem dos(as) artistas também fosse tomada ao acaso?
   (i) Quantas *playlists* seriam possíveis se fosse permitido o sorteio de mais de uma música do mesmo artista, porém ainda sem repetição de música?
   (j) Neste caso, qual seria a probabilidade da *playlist* não conter uma música do artista A?

   Solução:
   Notação:

$$\begin{aligned} A1, A2, A3 \text{ e } A4 &: \text{ músicas do(a) artista } A \\ B1, B2, \text{ e } B3 &: \text{ músicas do(a) artista } B \\ C1 \text{ e } C2 &: \text{ músicas do(a) artista } C \end{aligned}$$

   (a) Sim, pelo fato da ordem dos artistas e músicas de cada um ser escolhada ao acaso.
   (b) $\Omega_1 = \{(A1, B1, C1), (A1, B1, C2), (A1, B2, C1), (A1, B2, C2), (A1, B3, C1), (A1, B3, C2),$
   $(A2, B1, C1), (A2, B1, C2), (A2, B2, C1), (A2, B2, C2), (A2, B3, C1), (A2, B3, C2),$
   $(A3, B1, C1), (A3, B1, C2), (A3, B2, C1), (A3, B2, C2), (A3, B3, C1), (A3, B3, C2),$
   $(A4, B1, C1), (A4, B1, C2), (A4, B2, C1), (A4, B2, C2), (A4, B3, C1), (A4, B3, C2)\}$
   $n(\Omega_1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
   (c) Finito, enumerável e equiprovável. (Justificativa)
   (d) $E_1 = \{(A2, B1, C1), (A2, B1, C2), (A2, B2, C1), (A2, B2, C2), (A2, B3, C1), (A2, B3, C2)\}$
   $P[E_1] = n(E_1)/n(\Omega_1) = 6/24 = 1/4 = 0,25$
   (e) $E_2 = \{(A2, B2, C2), (A2, B3, C2), (A3, B2, C2), (A3, B3, C2), (A4, B2, C2), (A4, B3, C2)\}$
   $P[E_2] = n(E_2)/n(\Omega_1) = 6/24 = 1/4 = 0,25$
   (f) $P[E_1 \cap E_2] = 2/24 = 0.0833$
   (g) $P[E_1 \cup E_2] = P[E_1] + P[E_2] - P[E_1 \cap E_2] = 10/24 = 0.417$
   (h) $n(\Omega_2) = 24 * 6 = 144$
   (i) $n(\Omega_3) = 9 * 8 * 7 = 504$
   (j) $P[\overline{A}|\Omega_3] = (5 * 4)/504 = 0.0397$

---

1. Três algorítmos diferentes vão ser testados para a classificação do diagnóstico baseado em exames e imagens. Cada algorítmo pode acertar o diagnóstico da presença de certa doença e sabe-se que até o momento as taxas de acerto são de 85, 90 e 70%. Uma imagem/exames de um paciente com a doença é fornecida aos três algorítmos e avalia-se o acerto de cada um deles.

(a) Forneça o espaço amostral.
(b) Caracterize o espaço amostral quanto a ser (i) finito ou infinito, (ii) enumerável ou não enumerável, (iii) equiprovável ou não equiprovável, justificando as respostas.
(c) Defina dois eventos e forneça suas probabilidades.
(d) Qual a probabilidade de que A acerte o diagnóstico ou que apenas um algorítmo acerte?
(e) Qual a probabilidade de que A tenha acertado o diagnóstico sabendo que apenas um algorítmo acertou?
(f) Qual a probabilidade de que nem A nem B acertem o diagnóstico?
(g) Qual a probabilidade da doença ser detectada?
(h) Qual a probabilidade de B acertar o diagnóstico sabendo que a doença foi detectada?
(i) Defina uma variável aleatória sobre este espaço amostral e indique seus possíveis valores.
(j) Obtenha a distribuição de probabilidades da variável aleatória.

Solução:
Notação:

$$\begin{aligned}
A: &\text{ o algorítmo A acerta o diagnóstico } ; \overline{A} :: \text{ o algorítmo A erra o diagnóstico} \\
P[A] = 0,85 \quad P[\overline{A}] = 0,15 \\
B: &\text{ o algorítmo B acerta o diagnóstico } ; \overline{B} :: \text{ o algorítmo B erra o diagnóstico} \\
P[B] = 0,90 \quad P[\overline{B}] = 0,10 \\
C: &\text{ o algorítmo C acerta o diagnóstico } ; \overline{C} :: \text{ o algorítmo C erra o diagnóstico} \\
P[C] = 0,70 \quad P[\overline{C}] = 0,30
\end{aligned}$$

(a) $\Omega = \{(A,B,C),(\overline{A},B,C),(A,\overline{B},C),(A,B,\overline{C}),(\overline{A},\overline{B},C),(\overline{A},B,\overline{C}),(A,\overline{B},\overline{C}),(\overline{A},\overline{B},\overline{C})\}$
(b) Finito, enumerável e não equiprovável. (Justificativa)
(c)

$$\begin{aligned}
E_1: &\text{ A acerta o diagnóstico } = \{(A,B,C),(A,\overline{B},C),(A,B,\overline{C}),(A,\overline{B},\overline{C})\} \\
P[E_1] &= 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0,70 + 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0,30 + 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0.85 \\
E_2: &\text{ B erra o diagnóstico } = \{(A,\overline{B},C),(\overline{A},\overline{B},C),(A,\overline{B},\overline{C}),(\overline{A},\overline{B},\overline{C})\} \\
P[E_2] &= 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0.304
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
E_3: &\text{ apenas um algorítmo acerta o diagnóstico } = \{(A,\overline{B},\overline{C}),(\overline{A},B,\overline{C}),(\overline{A},\overline{B},C)\} \\
P[E_3] &= 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 + 0,15 \cdot 0,90 \cdot 0,30 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,70 = 0.0765 \\
E_1 \cap E_3 &= \{(A,\overline{B},\overline{C})\} \; ; \quad P[E_1 \cap E_3] = 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0.0255 \\
P[E_1 \cup E_3] &= P[E_1] + P[E_3] - P[E_1 \cap E_3] = 0.85 + 0.0765 - 0.0255 = 0.901
\end{aligned}$$

(e) $P[E_1|E_3] = \frac{P[E_1 \cap E_3]}{P[E_3]} = \frac{0.0255}{0.0765} = 0.333$
(f)

$$\begin{aligned}
E_4: &\text{ nem A nem B acertam o diagnóstico } = \{(\overline{A},\overline{B},C),(\overline{A},\overline{B},\overline{C})\} \\
P[E_4] &= 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0.015 \\
\text{note que: } &P[\overline{A}] \cdot P[\overline{B}] = 0,15 \cdot 0,10 = 0.015 (independentes)
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
E_5: &\text{ da doença ser detectada} \\
P[E_5] &= 1 - P[\overline{E}_5] = 1 - 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0.996
\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}
P[B] &= 1 - P[E_2] \\
B \cap E_5 &= \{(A,B,C),(\overline{A},B,C),(A,B,\overline{C}),(\overline{A},B,\overline{C})\} \\
P[B \cap E_5] &= 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0.70 + 0,15 \cdot 0,90 \cdot 0.70 + 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0.30 + 0,15 \cdot 0,90 \cdot 0.30 = 0.9 \\
P[B|E_5] &= \frac{P[B \cap E_5]}{P[E_5]} = \frac{0.9}{0.996} = 0.904
\end{aligned}$$

(i)

$$X: \text{ número de algorítmos que acertam o diagnóstico}$$
$$x \in \{0, 1, 2, 3\}$$

(j)

x	0	1	2	3
P[X=x]	0.0045	0.0765	0.383	0.535

Avaliação 03

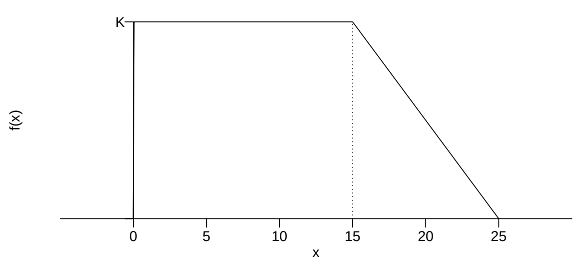
1. A localização de ocorrências em um trecho de 25 km de rodovia é considerada ser uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} K & \text{se } 0 < x \leq 15 \\ -\frac{K}{10}(x - 25) & \text{se } 15 < x \leq 25 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 25 \end{cases}$$

   (a) Encontre o valor de K.
   (b) Qual a probabilidade de ocorrer uma ocorrência nos primeiros 10 km?
   (c) Se sabe-se que uma ocorrência ocorreu antes do km 20, qual a probabilidade de que tenha sido antes do km 10?
   (d) Qual a probabilidade de uma ocorrência ter ocorrido entre os km 12 e 22 ?
   (e) Se uma central de apoio for colocada no km 0, qual a distância que espera-se percorrer para atender 100 ocorrências?

Solução:

A função $f(x)$ tem a forma conforme a seguinte figura:



(a) Para que $f(x)$ seja uma f.d.p. a área sob a figura deve ser 1, ou seja, $\int_0^{25} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
Solução geométrica:

$$b_r \cdot h_r + \frac{b_t \cdot h_t}{2} = 1$$
$$15 \cdot K + \frac{10 \cdot K}{2} = 1$$
$$K = \frac{1}{20} = 0,05$$

Solução por integração:

$$\int_0^{25} f(x)\mathrm{d}x = 1$$
$$\int_0^{15} f(x)\mathrm{d}x + \int_{15}^{25} f(x)\mathrm{d}x = 1$$
$$K \cdot (15 - 0) - \frac{K}{10}\left(25 \cdot (25 - 15) - \frac{25^2 - 15^2}{2}\right) = 1$$
$$K = \frac{1}{20} = 0,05$$

(b) $P[X \leq 10]$
Solução geométrica:

$$P[X \leq 10] = b_r \cdot h_r = 10 \cdot 0,05 = 0.5 = 1/2$$

Solução por integração:

$$\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x = 0,05 \cdot (15-0) = 0.5 = 1/2$$

(c)

$$P[X \leq 10 | X \leq 20] = \frac{P[(X \leq 10(\cap(X \leq 20])}{P[X \leq 20]} = \frac{P[X \leq 10]}{P[X \leq 20]}$$

é mais conveniente calcular: $P[X \leq 20] = 1 - P[X > 20]$

Solução geométrica:

$$P[X > 20] = \frac{b_t \cdot h_t}{2} = \frac{(25-20) \cdot f(20)}{2} = 0.9375 = 15/16$$

Solução por integração:

$$P[X > 20] = \int_{20}^{25} f(x)\mathrm{d}x = 0,005 \left(25(25-20) - \frac{25^2 - 20^2}{2}\right) = 0.9375 = 15/16$$

Portanto,

$$P[X \leq 10 | X \leq 20] = \frac{1}{0.9375} = 0.5333 = 8/15$$

(d) $P[12 \leq X \leq 22]$

Solução geométrica:

$$P[12 \leq X \leq 22] = b_r \cdot h_r + \frac{b_t \cdot h_t}{2} = (15-12) \cdot K + \frac{f(15) \cdot f(22)}{2} = 0.3775 = 6550/17351$$

Solução por integração:

$$\int_{12}^{22} f(x)\mathrm{d}x = \int_{12}^{15} f(x)\mathrm{d}x + \int_{15}^{22} f(x)\mathrm{d}x = 0,05(15-12) - 0,005 \left(25 \cdot (22-15) - \frac{22^2 - 15^2}{2}\right) = 0.3775 = 6550/17351$$

(e) $100 \cdot E[X] = 100 \cdot \int_0^{25} x \cdot f(x)\mathrm{d}x = 1021$

Solução computacional:

```
> fx <- function(x){
+     y <- numeric(length(x))
+     y[x > 0 & x <= 15]  <- 0.05
+     y[x > 15 & x <= 25]  <- -0.005 * (x[x > 15 & x <= 25] - 25)
+     return(y)
+ }
> ## (a)
> (qa <- integrate(fx, 0, 25)$value)

[1] 1

> ## (b)
> (qb <- integrate(fx, 0, 10)$value)

[1] 0.5

> ## (c)
> (p20 <- integrate(fx, 0, 20)$value)

[1] 0.9375

> (qc <- integrate(fx, 0, 10)$value/integrate(fx, 0, 20)$value)

[1] 0.5333

> ## (d)
> (qd <- integrate(fx, 12, 22)$value)

[1] 0.3775

> ## (e)
>  Ex.f <- function(x){ x * fx(x)}
> (EX <- integrate(Ex.f, 0, 25)$value)

[1] 10.21
```