CE-003: Estatística II - Turma: K/O, Avaliações Periódica, 2o sem. 2017

GRR: ________________ **Nome:** ____ **Turma:** ________

Avaliação 01

1. Uma *playlist* vai ser montada com três músicas selecionadas a partir de uma lista de quatro músicas do(a) artista A, outra lista de três de B e outra de duas de C. A sequência de músicas na *playlist* é montada ao acaso porém não repete músicas e tem uma de cada artista sempre na sequência de A, B e C nesta ordem..
   (a) Explique se e por que a composição da *playlist* pode ser considerada um experimento aleatório.
   (b) Forneça o espaço amostral.
   (c) Caracterize o espaço amostral quanto a ser (i) finito ou infinito, (ii) enumerável ou não enumerável, (iii) equiprovável ou não equiprovável, justificando as respostas.
   (d) Considere o evento "a *playlist* inicia com a segunda música do(a) artista A". Qual o conjunto que define este evento e qual a sua probabilidade de ocorrência?
   (e) Considere o evento "a *playlist* não contém as primeiras músicas das listas de nenhum dos(as) artistas". Qual o conjunto que define este evento e qua a sua probabilidade de ocorrência?
   (f) Qual seria a probabilidade de ocorrência de ambos eventos definidos no itens eventos anteriores?
   (g) E qual seria a probabilidade de ocorrência de algum deles?
   (h) Quantas *playlists* seria possíveis se a ordem dos(as) artistas também fosse tomada ao acaso?
   (i) Quantas *playlists* seriam possíveis se fosse permitido o sorteio de mais de uma música do mesmo artista, porém ainda sem repetição de música?
   (j) Neste caso, qual seria a probabilidade da *playlist* não conter uma música do artista A?

Solução:
Notação:

$$\begin{aligned} A1, A2, A3 \text{ e } A4 &: \text{ músicas do(a) artista } A \\ B1, B2, \text{ e } B3 &: \text{ músicas do(a) artista } B \\ C1 \text{ e } C2 &: \text{ músicas do(a) artista } C \end{aligned}$$

(a) Sim, pelo fato da ordem dos artistas e músicas de cada um ser escolhada ao acaso.
(b) $\Omega_1 = \{(A1, B1, C1), (A1, B1, C2), (A1, B2, C1), (A1, B2, C2), (A1, B3, C1), (A1, B3, C2),$
$(A2, B1, C1), (A2, B1, C2), (A2, B2, C1), (A2, B2, C2), (A2, B3, C1), (A2, B3, C2),$
$(A3, B1, C1), (A3, B1, C2), (A3, B2, C1), (A3, B2, C2), (A3, B3, C1), (A3, B3, C2),$
$(A4, B1, C1), (A4, B1, C2), (A4, B2, C1), (A4, B2, C2), (A4, B3, C1), (A4, B3, C2)\}$
$n(\Omega_1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
(c) Finito, enumerável e equiprovável. (Justificativa)
(d) $E_1 = \{(A2, B1, C1), (A2, B1, C2), (A2, B2, C1), (A2, B2, C2), (A2, B3, C1), (A2, B3, C2)\}$
$P[E_1] = n(E_1)/n(\Omega_1) = 6/24 = 1/4 = 0,25$
(e) $E_2 = \{(A2, B2, C2), (A2, B3, C2), (A3, B2, C2), (A3, B3, C2), (A4, B2, C2), (A4, B3, C2)\}$
$P[E_2] = n(E_2)/n(\Omega_1) = 6/24 = 1/4 = 0,25$
(f) $P[E_1 \cap E_2] = 2/24 = 0.0833$
(g) $P[E_1 \cup E_2] = P[E_1] + P[E_2] - P[E_1 \cap E_2] = 10/24 = 0.417$
(h) $n(\Omega_2) = 24 * 6 = 144$
(i) $n(\Omega_3) = 9 * 8 * 7 = 504$
(j) $P[\overline{A}|\Omega_3] = (5 * 4)/504 = 0.0397$

---

1. Três algorítmos diferentes vão ser testados para a classificação do diagnóstico baseado em exames e imagens. Cada algorítmo pode acertar o diagnóstico da presença de certa doença e sabe-se que até o momento as taxas de acerto são de 85, 90 e 70%. Uma imagem/exames de um paciente com a doença é fornecida aos três algorítmos e avalia-se o acerto de cada um deles.

(a) Forneça o espaço amostral.

(b) Caracterize o espaço amostral quanto a ser (i) finito ou infinito, (ii) enumerável ou não enumerável, (iii) equiprovável ou não equiprovável, justificando as respostas.

(c) Defina dois eventos e forneça suas probabilidades.

(d) Qual a probabilidade de que A acerte o diagnóstico ou que apenas um algorítmo acerte?

(e) Qual a probabilidade de que A tenha acertado o diagnóstico sabendo que apenas um algorítmo acertou?

(f) Qual a probabilidade de que nem A nem B acertem o diagnóstico?

(g) Qual a probabilidade da doença ser detectada?

(h) Qual a probabilidade de B acertar o diagnóstico sabendo que a doença foi detectada?

(i) Defina uma variável aleatória sobre este espaço amostral e indique seus possíveis valores.

(j) Obtenha a distribuição de probabilidades da variável aleatória.

Solução:
Notação:

$$\begin{aligned}
A: &\text{ o algorítmo A acerta o diagnóstico } ; \overline{A} :: \text{ o algorítmo A erra o diagnóstico} \\
P[A] = 0,85 &\quad P[\overline{A}] = 0,15 \\
B: &\text{ o algorítmo B acerta o diagnóstico } ; \overline{B} :: \text{ o algorítmo B erra o diagnóstico} \\
P[B] = 0,90 &\quad P[\overline{B}] = 0,10 \\
C: &\text{ o algorítmo C acerta o diagnóstico } ; \overline{C} :: \text{ o algorítmo C erra o diagnóstico} \\
P[C] = 0,70 &\quad P[\overline{C}] = 0,30
\end{aligned}$$

(a) $\Omega = \{(A,B,C),(\overline{A},B,C),(A,\overline{B},C),(A,B,\overline{C}),(\overline{A},\overline{B},C),(\overline{A},B,\overline{C}),(A,\overline{B},\overline{C}),(\overline{A},\overline{B},\overline{C})\}$

(b) Finito, enumerável e não equiprovável. (Justificativa)

(c)

$$\begin{aligned}
E_1: &\text{ A acerta o diagnóstico } = \{(A,B,C),(A,\overline{B},C),(A,B,\overline{C}),(A,\overline{B},\overline{C})\} \\
P[E_1] &= 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0,70 + 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0,30 + 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0.85 \\
E_2: &\text{ B erra o diagnóstico } = \{(A,\overline{B},C),(\overline{A},\overline{B},C),(A,\overline{B},\overline{C}),(\overline{A},\overline{B},\overline{C})\} \\
P[E_2] &= 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0.304
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
E_3: &\text{ apenas um algorítmo acerta o diagnóstico } = \{(A,\overline{B},\overline{C}),(\overline{A},B,\overline{C}),(\overline{A},\overline{B},C)\} \\
P[E_3] &= 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 + 0,15 \cdot 0,90 \cdot 0,30 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,70 = 0.0765 \\
E_1 \cap E_3 &= \{(A,\overline{B},\overline{C})\} \ ; \quad P[E_1 \cap E_3] = 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0.0255 \\
P[E_1 \cup E_3] &= P[E_1] + P[E_3] - P[E_1 \cap E_3] = 0.85 + 0.0765 - 0.0255 = 0.901
\end{aligned}$$

(e) $P[E_1|E_3] = \frac{P[E_1 \cap E_3]}{P[E_3]} = \frac{0.901}{0.0765} = 0.333$

(f)

$$\begin{aligned}
E_4: &\text{ nem A nem B acertam o diagnóstico } = \{(\overline{A},\overline{B},C),(\overline{A},\overline{B},\overline{C})\} \\
P[E_4] &= 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0.015 \\
\text{note que: } &P[\overline{A}] \cdot P[\overline{B}] = 0,15 \cdot 0,10 = 0.015 (independentes)
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
E_5: &\text{ da doença ser detectada} \\
P[E_5] &= 1 - P[\overline{E}_5] = 1 - 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0.996
\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}
P[B] &= 1 - P[E_2] \\
B \cap E_5 &= \{(A,B,C),(\overline{A},B,C),(A,B,\overline{C}),(\overline{A},B,\overline{C})\} \\
P[B \cap E_5] &= 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0.70 + 0,15 \cdot 0,90 \cdot 0.70 + 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0.30 + 0,15 \cdot 0,90 \cdot 0.30 = 0.9 \\
P[B|E_5] &= \frac{P[B \cap E_5]}{P[E_5]} = \frac{0.9}{0.996} = 0.904
\end{aligned}$$

(i)

$$X: \text{ número de algorítmos que acertam o diagnóstico}$$
$$x \in \{0, 1, 2, 3\}$$

(j)

x	0	1	2	3
P[X=x]	0.0045	0.0765	0.383	0.535