# CE-003: Estatística II - Turma K/O
# Avaliações Semanais ($1^o$ semestre 2016)

Semana 2 (av-01)

1. (adaptado de Bussab & Morettin) Três jogadores, $A$, $B$ e $C$ disputam um torneio de tênis. Inicialmente $A$ joga com $B$ e o vencedor joga com $C$, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes em seguida ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas.

   (a) A sequência de jogos que determina o resultado final do torneio pode ser considerada um experimento aleatório? Justifique.

   (b) Quais são os possíveis resultados?

   (c) O torneio é "justo" em relação às chances de vitória dos jogadores mediante a regra proposta?

   Considere agora que, sabendo-se dos restrospectos de resultados dos jogadores e suas classificações em *rankings* tem-se que $A$ vence $B$ com probabilidade de 0,72, vence $C$ com probabilidade de 0,65 e $B$ vence $C$ com probabilidade de 0,38.

   (d) Qual a probabilidade de cada jogador ganhar o torneio?

**Solução:**

| 1o Jogo | Vencedor | 2o Jogo | Vencedor | 3o Jogo | Vencedor | 4o Jogo | Vencedor | Campeão | Sequência* | Prob** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A x B | A | A x C | A | - | - | - | - | A | (AA) | 1/4 |
| | A | A x C | C | B x C | B | A x B | A | A | (ACBA) | 1/16 |
| | A | A x C | C | B x C | B | A x B | B | B | (ACBB) | 1/16 |
| | A | A x C | C | B x C | C | - | - | C | (ACC) | 1/8 |
| | B | B x C | B | - | - | - | - | B | (BB) | 1/4 |
| | B | B x C | C | A x C | A | A x B | A | A | (BCAA) | 1/16 |
| | B | B x C | C | A x C | C | A x B | B | B | (BCAB) | 1/16 |
| | B | B x C | C | A x C | C | - | - | C | (BCC) | 1/8 |

*Sequência : sequência de vencedores dos jogos torneio

** Probabilidade supondo igualdade entre os competidores em cada jogo

(a) Sim. (justificativas serão analisadas)

(b)

$$\Omega = \{(AA), (ACBA), (ACBB), (ACC), (BB), (BCAA), (BCAB), (ACC)\}$$

(c) O jogo não é honesto pois sob a hipótese de igualdade de condições em cada jogo os jogadores possuem diferentes chances de vencer o torneio.

| Vencedor | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Sequências | {(AA), (ACBA), (BCAA)} | {(ACBB),(BB),(BCAB)} | {(BCC),(ACC)} |
| Probabilidade | (1/4)+(1/16)+(1/16)=3/8 | (1/16)+(1/4)+(1/16)=3/8 | (1/8)+(1/8) = 2/8 |

(d)

| Campeão | Sequência | Probabilidade |
|---|---|---|
| A | (AA) | $0,72 \cdot 0,65 = 0.468$ |
| A | (ACBA) | $0,72 \cdot 0,35 \cdot 0,38 \cdot 0,72 = 0.0689$ |
| B | (ACBB) | $0,72 \cdot 0,35 \cdot 0,38 \cdot 0,28 = 0.0268$ |
| B | (ACC) | $0,72 \cdot 0,35 \cdot 0,62 = 0.1562$ |
| B | (BB) | $0,28 \cdot 0,38 = 0.1064$ |
| A | (BCAA) | $0,28 \cdot 0,62 \cdot 0,65 \cdot 0,72 = 0.0812$ |
| B | (BCAB) | $0,28 \cdot 0,62 \cdot 0,65 \cdot 0,28 = 0.0316$ |
| C | (BCC) | $0,28 \cdot 0,62 \cdot 0,35 = 0.0608$ |

| Vencedor | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Sequências | {(AA), (ACBA), (BCAA)} | {(ACBB),(BB),(BCAB)} | {(BCC),(ACC)} |
| Probabilidade | 0.6182 | 0.1648 | 0.217 |

1. Uma coleção de 100 programas de computador foi examinada para detectar erros de *"sintaxe"*, *"input/output"* e de *"outro tipo"* diferente dos anteriores. Desses 100 programas, 20 tinham erros de "sintaxe", 10 tinham erros de "input/output" e 5 tinham erros de "outro tipo", 6 tinham erros de "sintaxe" e de "input/output", 3 tinham erros de "sintaxe" e de "outro tipo", 3 tinham erros de "input/output" e de "outro tipo" e 2 tinham os três tipos de erros considerados. Um programa é seleccionado ao acaso desta coleção. Determine a probabilidade de que o programa seleccionado tenha:
   (a) Exclusivamente erros de "sintaxe".
   (b) Pelo menos um dos três tipos de erros

   **Solução:**
   Notação:

$$\begin{aligned} S &: \text{erro de sintaxe} \\ I &: \text{erro de input/output} \\ O &: \text{erro de outro tipo} \end{aligned}$$

   Dados:

$$\begin{aligned} P[S] = 0,20 \quad &; \quad P[I] = 0,10 \quad ; \quad P[O] = 0,05 \\ P[S \cap I] = 0,06 \quad &; \quad P[S \cap O] = 0,03 \quad ; \quad P[I \cap O] = 0,03 \\ P[S \cap I \cap O] = 0,02 & \end{aligned}$$

   (a) $P[S] - P[(S \cap I) \cup (S \cap O)] = P[S] - \{P[(S \cap I)] + (S \cap O)] - P[S \cap I \cap O]\} =$
   $= 0,20 - 0,06 - 0,03 + 0,02 = 0,13$
   (b) $P[S \cup I \cup O] = P[S] + P[I] + P[O] - P[S \cap I] - P[S \cap O] - P[I \cap O] + P[S \cap I \cap O] =$
   $= 0,20 + 0,10 + 0,05 - 0,06 - 0,03 - 0,03 + 0,02 = 0,25$

---

2. Suponha que 5% de uma população sofre de hipertensão e que, de entre estes, 75% ingerem bebidas alcoólicas. De entre os que não são hipertensos 50% ingerem bebidas alcoólicas. Suponha que um indivíduo é escolhido ao acaso da população.
   (a) Calcule a probabilidade de o indivíduo escolhido ingerir bebidas alcoólicas.
   (b) Sabendo que o indivíduo escolhido ingere bebidas alcoólicas, calcule a probabilidade de sofrer de hipertensão.

   **Solução:**
   Notação:

$$\begin{aligned} &H : \text{indivíduo é hipertenso} \quad \overline{H} : \text{indivíduo não é hipertenso} \\ &A : \text{indivíduo ingere bebida alcólica} \quad \overline{H} : \text{indivíduo não ingere bebida alcólica} \end{aligned}$$

   Dados:

$$P[H] = 0,05 \quad , \quad P[A|H] = 0,75 \quad , \quad P[A|\overline{H}] = 0,50$$

   Portanto

$$P[\overline{H}] = 1 - P[H] = 0,95$$

   (a) $P[A] = P[A \cap H] + P[A \cap \overline{H}] = P[A|H] \cdot P[H] + P[A|\overline{H}] \cdot P[\overline{H}] = 0,75 \cdot 0,05 + 0,50 * 0,95 = 0.5125$
   (b) $P[H|A] = \frac{P[H \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A|H] \cdot [H]}{P[A]} = \frac{0,75 \cdot 0.05}{0.5125} = 0.0732$

   Observação: o problema poderia ser organizado e resolvido utilizando uma tabela $2 \times 2$:

| | $H$ | $\overline{H}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $P[A \cap H] = 0.0375$ | $P[A \cap \overline{H}] = 0.475$ | $P[A] = 0.5125$ |
| $\overline{A}$ | $P[\overline{A} \cap H] = 0.0125$ | $P[\overline{A} \cap \overline{H}] = 0.475$ | $P[\overline{A}] = 0.4875$ |
| | $P[H] = 0,05$ | $P[\overline{H}] = 0,95$ | 1 |

---

3. Registos efetuados levaram a concluir que os motoristas que circulam em determinada estrada podem ter transgressões classificadas em dois tipos ditas do tipo I ou do tipo II, não se notando nenhum caso em que o motorista cometa ambas as transgressões. Por cada 500 motoristas multados há 100 motoristas multados por transgressões do tipo I. Sabendo que 10% dos motoristas que cometem transgressões do tipo I são multados; que 1% cometem transgressões do tipo I e que 2% cometem transgressões do tipo II, calcule a probabilidade de que um motorista que circule nessa estrada e cometa uma transgressão do tipo II seja multado.

**Solução:**
Notação:

$I$ : transgressão do tipo I ; $II$ : transgressão do tipo II ; 0 : sem transgressão
$M$ : motorista recebe multa ; $\overline{M}$ : motorista não recebe multa

Dados:

$$P[I \cap II] = 0$$
$$P[I|M] = 100/500 = 0,20$$
$$P[M|I] = 0,10$$
$$P[I] = 0,01 \text{ e } P[II] = 0,02$$

Queremos calcular $P[M|II]$.
A partir dos dados temos que:

$$P[II|M] = 1 - P[1|M] = 0,80$$
$$P[M|I] \cdot P[I] = 0,10 \cdot 0,01 = 0,001$$

Podemos obter $P[M]$:

$$P[I|M] = 0,20$$
$$\frac{P[M \cap I]}{P[M]} = 0,20$$
$$\frac{0,001}{P[M]} = 0,20$$
$$P[M] = 0,005$$

Como $P[M] = P[M \cap I] + P[M \cap II]$ temos que

$$P[M \cap II] = 0,004$$
$$P[M|II] \cdot P[II] = 0,004$$
$$P[M|II] = 0,004/0,02 = 0,20$$

Alternativamente, o problema pode ser esquamatizado na tabela:

| | 0 | $I$ | $II$ | |
|---|---|---|---|---|
| $M$ | $P[0 \cap M] = 0$ | $P[I \cap M] = 0,001$ | $P[II \cap M] = 0,004$ | $0,005$ |
| $\overline{M}$ | $P[0 \cap \overline{M}] = 0,97$ | $P[I \cap \overline{M}] = 0,009$ | $P[II \cap \overline{M}] = 0,016$ | $0,995$ |
| | $P[0] = 0,97$ | $P[I] = 0,01$ | $P[II] = 0,02$ | 1 |

---

Semana 4 (av-03)

Um estudante vai fazer um teste no qual cada questão tem cinco alternativas das quais apenas uma é correta. Nos dois contextos a seguir defina a variável aleatória, seus possíveis valores, sua distribuição de probabilidades e calcule a probabilidade pedida, supondo-se acerto ao acaso (ou seja, o estudante "chuta" todas as questões).

1. **Contexto 1:** O estudante vai fazer cinco questões e deseja-se a probabilidade de acertar três ou mais questões.
2. **Contexto 2:** As questões são apresentadas sequencialmente e o teste se encerra quando o estudante erra alguma questão. Qual a probabilidade do estudante acertar três ou mais questões.

Itens extras discutidos em sala:

3. **Contexto 3:** Considere o mesmo que no **Contexto 2:**, só que encerrando quando erra a *terceira* questão.
4. **Contexto 4:** Considere que há um banco de 30 questões das quais o estudante sabe 10. Selecionam-se cinco questões e deseja-se saber a probabilidade de mais que três acertos.

**Solução:**

1. **Contexto 1:**

$$\begin{aligned}
&X : \text{número de acertos em cinco questões}\\
&x \in \{0,1,2,3,4,5\}\\
&X \sim \mathrm{B}(n=4, p=1/5)\\
P[X=x] &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}\\
&p : \text{probabilidade de acertar cada questão ("sucesso")}\\
P[X \geq 3] &= P[X=3] + P[X=4] + P[X=5] =\\
&= \binom{5}{3} 0,2^3 (1-0,2)^{5-3} + \binom{5}{4} 0,2^4 (1-0,2)^{5-4} + \binom{5}{5} 0,2^5 (1-0,2)^{5-5} = 0.0579
\end{aligned}$$

2. **Contexto 2:**

$$\begin{aligned}
&X : \text{número de acertos até o primeiro erro}\\
&x \in \{0,1,2,3,\ldots\}\\
&X \sim \mathrm{G}(n=4, p=4/5)\\
P[X=x] &= (1-p)^x p\\
&p : \text{probabilidade de errar a questão ("sucesso")}\\
P[X \geq 3] &= 1 - (P[X=0] + P[X=1] + P[X=2]) = 1 - (0,2^0 0,8 + 0,2^1 0,8 + 0,2^2 0,8) = 0.008
\end{aligned}$$

3. **Contexto 3:**

$$\begin{aligned}
&X : \text{número de acertos até o terceiro erro}\\
&x \in \{0,1,2,3,\ldots\}\\
&X \sim \mathrm{BN}(k=3, p=4/5)\\
P[X=x] &= \binom{x+k-1}{x} (1-p)^x p\\
&p : \text{probabilidade de errar a questão ("sucesso")}\\
P[X \geq 3] &= 1 - (P[X=0] + P[X=1] + P[X=2]) =\\
&= 1 - (\binom{2}{0} 0,2^0 0,8 + \binom{3}{1} 0,2^1 0,8 + \binom{4}{2} 0,2^2 0,8) = 0.0579
\end{aligned}$$

4. **Contexto 4:**

$$\begin{aligned}
&X : \text{número de acertos em cinco questões sorteadas}\\
&x \in \{0,1,2,3,4,5\}\\
&X \sim \mathrm{HG}(N=30, K=10, n=5)\\
P[X=x] &= \frac{\binom{k}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}\\
P[X \geq 3] &= P[X=3] + P[X=4] + P[X=5] =\\
&= \frac{\binom{10}{3}\binom{20}{2}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{10}{4}\binom{20}{1}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{10}{5}\binom{20}{5}}{\binom{30}{0}} = 0.1912
\end{aligned}$$

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> pa <- pbinom(2, size=5, prob=1/5, lower=FALSE)
> pb <- pgeom(2, prob=4/5, lower=FALSE)
> pc <- pnbinom(2, size=3, prob=4/5, lower=FALSE)
> pd <- phyper(2, m=10, n=20, k=5, lower=FALSE)
```

---

Semana 5 (av-04)

1. Considere que serão feitas inspeções em veículos em uma determinada área para identificar e orientar a correção de irregularidades. Supõe-se que os veículos inspecionados são escolhidos ao acaso. Considere os diferentes cenários descritos em cada um dos itens a seguir, identifique a variável aleatória em questão, seus possíveis valores, sua distribuição de probabilidades e responda à questão formulada.

(a) Em um lote de 50 veículos sabe-se que 8 deles possuem alguma irregularidade. Serão inspecionados sete veículos. Qual a probabilidade de encontrar mais de um com alguma irregularidade?

(b) Sabendo que 15% dos veículos na área apresentam irregularidade, serão inspecionados veículos até que seja encontrado o segundo com irregularidade. Qual a probabilidade de que sejam feitas no máximo cinco inspeções?

(c) A partir de experiências anteriores saba-se que são encontrados, em média, 1,8 carros irregulares por hora de inspeção. Qual a probabilidade de que em uma hora não seja encontrado nenhum carro irregular? E qual a probabilidade de que sejam encontrados exatamente cinco irregulares em duas horas de inspeção? (supondo ainda que 15% dos carros da região são irregulares)

(d) A partir de um certo momento decide-se que a inspeção vai terminar quando for encontrado o próximo veículo irregular. Qual a probabilidade de que a partir deste momento sejam ainda inspecionados três ou mais carros?

(e) Um inspetor vai inspecionar sete carros. Qual a probabilidade de que encontre mais que um irregular? (supondo ainda que 15% dos carros da região são irregulares)

**Solução:**

(a) **Contexto 1:**

$$\begin{aligned}
&X : \text{número veículos com irregularidade (dentre os sete selecionados)} \\
&x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \\
&X \sim \text{HG}(N = 200, K = 30, n = 7) \\
P[X = x] &= \frac{\binom{k}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\
P[X > 1] &= P[X = 2] + P[X = 3] + \ldots P[X = 7] = 1 - \{P[X = 0] + P[X = 1]\} \\
&= 1 - \left\{ \frac{\binom{8}{0}\binom{42}{7}}{\binom{50}{7}} + \frac{\binom{8}{1}\binom{42}{6}}{\binom{50}{7}} \right\} = 0.3098
\end{aligned}$$

(b) **Contexto 2:**

$$\begin{aligned}
&Y : \text{número de inspeções até o segundo irregular} \\
&y \in \{2,3,4,5,\ldots\} \\
&X : \text{número de regulares até o segundo irregular} \\
&x \in \{0,1,2,3,\ldots\} \\
&X \sim \text{BN}(k = 2, p = 0,15) \\
P[X = x] &= \binom{x+k-1}{x} p^k (1-p)^x \\
&p : \text{probabilidade de encontrar um veículo irregular (“sucesso”)} \\
P[Y \leq 5] = P[X \leq 3] &= P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] = \\
&= \binom{1}{0} 0,15^2 0,85^0 + \binom{2}{1} 0,15^2 0,85^1 + \binom{3}{2} 0,15^2 0,85^2 + \binom{4}{1} 0,15^2 0,85^3 = 0.7765
\end{aligned}$$

(c) **Contexto 3:**

$$\begin{aligned}
&X_1 : \text{número de irregulares por hora} \\
&x_1 \in \{0,1,2,3,\ldots\} \\
&X_1 \sim \text{P}(\lambda = 1,8) \\
P[X = x] &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
P[X_1 = 0] &= \frac{e^{-1,8} 1,8^0}{0!} = 0.1653 \\
&X_2 : \text{número de irregulares por período de duas (2) horas} \\
&x_2 \in \{0,1,2,3,\ldots\} \\
&X_2 \sim \text{P}(\lambda = 2 \cdot 1,8 = 3,6) \\
P[X_2 = 5] &= \frac{e^{-3,6} 3,6^5}{5!} = 0.1377
\end{aligned}$$

(d) **Contexto 4:**

$$
\begin{aligned}
Y &: \text{número de inspeções até o próximo irregular}\\
y &\in \{1,2,3,4,\ldots\}\\
X &: \text{número de regulares até o próximo irregular}\\
x &\in \{0,1,2,3,\ldots\}\\
X &\sim \mathrm{G}(p=0,15)\\
P[X=x] &= (1-p)^x p\\
p &: \text{probabilidade de encontrar um veículo irregular (“sucesso”)}\\
P[Y \geq 3] = P[X \geq 2] &= 1 - \{P[X=0] + P[X=1] + P[X=2]\} =\\
&= 1 - \left\{0,150,85^0 + 0,150,85^1 + 0,150,85^2\right\} = 0.6141
\end{aligned}
$$

(e) **Contexto 5:**

$$
\begin{aligned}
X &: \text{número de irregulares em sete (7) inspeções}\\
P[X=x] &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}\\
p &: \text{probabilidade de acertar cada questão (“sucesso”)}\\
P[X>1] &= 1 - \{P[X=0] + P[X=1]\} = 1 - \left\{\binom{5}{0} 0,15^0 (1-0,15)^{7-0} + \binom{5}{1} 0,15^1 (1-0,15)^{7-1}\right\} = 0.2834
\end{aligned}
$$

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> pa <- phyper(1, m=8, n=42, k=7, lower=FALSE)
> pb <- pnbinom(4, size=2, prob=0.15, lower=FALSE)
> pc1 <- dpois(0, lambda=1.8)
> pc2 <- dpois(5, lambda=2*1.8)
> pd <- pgeom(2, prob=0.15, lower=FALSE)
> pe <- pbinom(1, size=7, prob=0.15, lower=FALSE)
```