CE-003: Estatística II - Turma K/O
Avaliações Semanais (1^o semestre 2016)

Semana 2 (av-01)

1. (adaptado de Bussab & Morettin) Três jogadores, A, B e C disputam um torneio de tênis. Inicialmente A joga com B e o vencedor joga com C, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes em seguida ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas.

   (a) A sequência de jogos que determina o resultado final do torneio pode ser considerada um experimento aleatório? Justifique.

   (b) Quais são os possíveis resultados?

   (c) O torneio é "justo" em relação às chances de vitória dos jogadores mediante a regra proposta?

   Considere agora que, sabendo-se dos restrospectos de resultados dos jogadores e suas classificações em *rankings* tem-se que A vence B com probabilidade de 0,72, vence C com probabilidade de 0,65 e B vence C com probabilidade de 0,38.

   (d) Qual a probabilidade de cada jogador ganhar o torneio?

Solução:

1o Jogo	Vencedor	2o Jogo	Vencedor	3o Jogo	Vencedor	4o Jogo	Vencedor	Campeão	Sequência*	Prob**
A x B	A	A x C	A	-	-	-	-	A	(AA)	1/4
	A	A x C	C	B x C	B	A x B	A	A	(ACBA)	1/16
	A	A x C	C	B x C	B	A x B	B	B	(ACBB)	1/16
	A	A x C	C	B x C	C	-	-	C	(ACC)	1/8
	B	B x C	B	-	-	-	-	B	(BB)	1/4
	B	B x C	C	A x C	A	A x B	A	A	(BCAA)	1/16
	B	B x C	C	A x C	C	A x B	B	B	(BCAB)	1/16
	B	B x C	C	A x C	C	-	-	C	(BCC)	1/8

*Sequência : sequência de vencedores dos jogos torneio

** Probabilidade supondo igualdade entre os competidores em cada jogo

(a) Sim. (justificativas serão analisadas)

(b)

$$\Omega = \{(AA), (ACBA), (ACBB), (ACC), (BB), (BCAA), (BCAB), (ACC)\}$$

(c) O jogo não é honesto pois sob a hipótese de igualdade de condições em cada jogo os jogadores possuem diferentes chances de vencer o torneio.

Vencedor	A	B	C
Sequências	{(AA), (ACBA), (BCAA)}	{(ACBB),(BB),(BCAB)}	{(BCC),(ACC)}
Probabilidade	(1/4)+(1/16)+(1/16)=3/8	(1/16)+(1/4)+(1/16)=3/8	(1/8)+(1/8) = 2/8

(d)

Campeão	Sequência	Probabilidade
A	(AA)	$0,72 \cdot 0,65 = 0.468$
A	(ACBA)	$0,72 \cdot 0,35 \cdot 0,38 \cdot 0,72 = 0.0689$
B	(ACBB)	$0,72 \cdot 0,35 \cdot 0,38 \cdot 0,28 = 0.0268$
B	(ACC)	$0,72 \cdot 0,35 \cdot 0,62 = 0.1562$
B	(BB)	$0,28 \cdot 0,38 = 0.1064$
A	(BCAA)	$0,28 \cdot 0,62 \cdot 0,65 \cdot 0,72 = 0.0812$
B	(BCAB)	$0,28 \cdot 0,62 \cdot 0,65 \cdot 0,28 = 0.0316$
C	(BCC)	$0,28 \cdot 0,62 \cdot 0,35 = 0.0608$

Vencedor	A	B	C
Sequências	{(AA), (ACBA), (BCAA)}	{(ACBB),(BB),(BCAB)}	{(BCC),(ACC)}
Probabilidade	0.6182	0.1648	0.217

1. Uma coleção de 100 programas de computador foi examinada para detectar erros de *"sintaxe"*, *"input/output"* e de *"outro tipo"* diferente dos anteriores. Desses 100 programas, 20 tinham erros de "sintaxe", 10 tinham erros de "input/output" e 5 tinham erros de "outro tipo", 6 tinham erros de "sintaxe" e de "input/output", 3 tinham erros de "sintaxe" e de "outro tipo", 3 tinham erros de "input/output" e de "outro tipo" e 2 tinham os três tipos de erros considerados. Um programa é seleccionado ao acaso desta coleção. Determine a probabilidade de que o programa seleccionado tenha:
   (a) Exclusivamente erros de "sintaxe".
   (b) Pelo menos um dos três tipos de erros

   Solução:
   Notação:

$$\begin{aligned} S &: \text{erro de sintaxe} \\ I &: \text{erro de input/output} \\ O &: \text{erro de outro tipo} \end{aligned}$$

   Dados:

$$\begin{aligned} P[S] = 0,20 \quad &; \quad P[I] = 0,10 \quad ; \quad P[O] = 0,05 \\ P[S \cap I] = 0,06 \quad &; \quad P[S \cap O] = 0,03 \quad ; \quad P[I \cap O] = 0,03 \\ P[S \cap I \cap O] = 0,02 & \end{aligned}$$

   (a) $P[S] - P[(S \cap I) \cup (S \cap O)] = P[S] - \{P[(S \cap I)] + (S \cap O)] - P[S \cap I \cap O]\} =$
   $= 0,20 - 0,06 - 0,03 + 0,02 = 0,13$
   (b) $P[S \cup I \cup O] = P[S] + P[I] + P[O] - P[S \cap I] - P[S \cap O] - P[I \cap O] + P[S \cap I \cap O] =$
   $= 0,20 + 0,10 + 0,05 - 0,06 - 0,03 - 0,03 + 0,02 = 0,25$

---

2. Suponha que 5% de uma população sofre de hipertensão e que, de entre estes, 75% ingerem bebidas alcoólicas. De entre os que não são hipertensos 50% ingerem bebidas alcoólicas. Suponha que um indivíduo é escolhido ao acaso da população.
   (a) Calcule a probabilidade de o indivíduo escolhido ingerir bebidas alcoólicas.
   (b) Sabendo que o indivíduo escolhido ingere bebidas alcoólicas, calcule a probabilidade de sofrer de hipertensão.

   Solução:
   Notação:

$$\begin{aligned} &H : \text{indivíduo é hipertenso} \quad \overline{H} : \text{indivíduo não é hipertenso} \\ &A : \text{indivíduo ingere bebida alcólica} \quad \overline{H} : \text{indivíduo não ingere bebida alcólica} \end{aligned}$$

   Dados:

$$P[H] = 0,05 \quad , \quad P[A|H] = 0,75 \quad , \quad P[A|\overline{H}] = 0,50$$

   Portanto

$$P[\overline{H}] = 1 - P[H] = 0,95$$

   (a) $P[A] = P[A \cap H] + P[A \cap \overline{H}] = P[A|H] \cdot P[H] + P[A|\overline{H}] \cdot P[\overline{H}] = 0,75 \cdot 0,05 + 0,50 * 0,95 = 0.5125$
   (b) $P[H|A] = \frac{P[H \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A|H] \cdot [H]}{P[A]} = \frac{0,75 \cdot 0.05}{0.5125} = 0.0732$

   Observação: o problema poderia ser organizado e resolvido utilizando uma tabela 2×2:

	H	$\overline{H}$	
A	$P[A \cap H] = 0.0375$	$P[A \cap \overline{H}] = 0.475$	$P[A] = 0.5125$
$\overline{A}$	$P[\overline{A} \cap H] = 0.0125$	$P[\overline{A} \cap \overline{H}] = 0.475$	$P[\overline{A}] = 0.4875$
	$P[H] = 0,05$	$P[\overline{H}] = 0,95$	1

---

3. Registos efetuados levaram a concluir que os motoristas que circulam em determinada estrada podem ter transgressões classificadas em dois tipos ditas do tipo I ou do tipo II, não se notando nenhum caso em que o motorista cometa ambas as transgressões. Por cada 500 motoristas multados há 100 motoristas multados por transgressões do tipo I. Sabendo que 10% dos motoristas que cometem transgressões do tipo I são multados; que 1% cometem transgressões do tipo I e que 2% cometem transgressões do tipo II, calcule a probabilidade de que um motorista que circule nessa estrada e cometa uma transgressão do tipo II seja multado.

Solução:
Notação:

I : transgressão do tipo I ; II : transgressão do tipo II ; 0 : sem transgressão
M : motorista recebe multa ; $\overline{M}$: motorista não recebe multa

Dados:

$$\begin{aligned} P[I \cap II] &= 0 \\ P[I|M] &= 100/500 = 0,20 \\ P[M|I] &= 0,10 \\ P[I] &= 0,01 \text{ e } P[II] = 0,02 \end{aligned}$$

Queremos calcular $P[M|II]$.
A partir dos dados temos que:

$$\begin{aligned} P[II|M] &= 1 - P[1|M] = 0,80 \\ P[M|I] \cdot P[I] &= 0,10 \cdot 0,01 = 0,001 \end{aligned}$$

Podemos obter $P[M]$:

$$\begin{aligned} P[I|M] &= 0,20 \\ \frac{P[M \cap I]}{P[M]} &= 0,20 \\ \frac{0,001}{P[M]} &= 0,20 \\ P[M] &= 0,005 \end{aligned}$$

Como $P[M] = P[M \cap I] + P[M \cap II]$ temos que

$$\begin{aligned} P[M \cap II] &= 0,004 \\ P[M|II] \cdot P[II] &= 0,004 \\ P[M|II] &= 0,004/0,02 = 0,20 \end{aligned}$$

Alternativamente, o problema pode ser esquamatizado na tabela:

	0	I	II	
M	$P[0 \cap M] = 0$	$P[I \cap M] = 0,001$	$P[II \cap M] = 0,004$	$0,005$
$\overline{M}$	$P[0 \cap \overline{M}] = 0,97$	$P[I \cap \overline{M}] = 0,009$	$P[II \cap \overline{M}] = 0,016$	$0,995$
	$P[0] = 0,97$	$P[I] = 0,01$	$P[II] = 0,02$	1

Semana 4 (av-03)

Um estudante vai fazer um teste no qual cada questão tem cinco alternativas das quais apenas uma é correta. Nos dois contextos a seguir defina a variável aleatória, seus possíveis valores, sua distribuição de probabilidades e calcule a probabilidade pedida, supondo-se acerto ao acaso (ou seja, o estudante "chuta" todas as questões).

1. **Contexto 1:** O estudante vai fazer cinco questões e deseja-se a probabilidade de acertar três ou mais questões.
2. **Contexto 2:** As questões são apresentadas sequencialmente e o teste se encerra quando o estudante erra alguma questão. Qual a probabilidade do estudante acertar três ou mais questões.

Itens extras discutidos em sala:

3. **Contexto 3:** Considere o mesmo que no **Contexto 2:**, só que encerrando quando erra a *terceira* questão.
4. **Contexto 4:** Considere que há um banco de 30 questões das quais o estudante sabe 10. Selecionam-se cinco questões e deseja-se saber a probabilidade de mais que três acertos.

Solução:

1. **Contexto 1:**

$$
\begin{aligned}
X &: \text{número de acertos em cinco questões} \\
x &\in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\
X &\sim \text{B}(n = 4, p = 1/5) \\
P[X = x] &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
p &: \text{probabilidade de acertar cada questão (“sucesso”)} \\
P[X \geq 3] &= P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] = \\
&= \binom{5}{3} 0,2^3 (1-0,2)^{5-3} + \binom{5}{4} 0,2^4 (1-0,2)^{5-4} + \binom{5}{5} 0,2^5 (1-0,2)^{5-5} = 0.0579
\end{aligned}
$$

2. **Contexto 2:**

$$
\begin{aligned}
X &: \text{número de acertos até o primeiro erro} \\
x &\in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\
X &\sim \text{G}(n = 4, p = 4/5) \\
P[X = x] &= (1-p)^x p \\
p &: \text{probabilidade de errar a questão (“sucesso”)} \\
P[X \geq 3] &= 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]) = 1 - (0,2^0 0,8 + 0,2^1 0,8 + 0,2^2 0,8) = 0.008
\end{aligned}
$$

3. **Contexto 3:**

$$
\begin{aligned}
X &: \text{número de acertos até o terceiro erro} \\
x &\in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\
X &\sim \text{BN}(k = 3, p = 4/5) \\
P[X = x] &= \binom{x+k-1}{x} (1-p)^x p \\
p &: \text{probabilidade de errar a questão (“sucesso”)} \\
P[X \geq 3] &= 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]) = \\
&= 1 - (\binom{2}{0} 0,2^0 0,8 + \binom{3}{1} 0,2^1 0,8 + \binom{4}{2} 0,2^2 0,8) = 0.0579
\end{aligned}
$$

4. **Contexto 4:**

$$
\begin{aligned}
X &: \text{número de acertos em cinco questões sorteadas} \\
x &\in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\
X &\sim \text{HG}(N = 30, K = 10, n = 5) \\
P[X = x] &= \frac{\binom{k}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\
P[X \geq 3] &= P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] = \\
&= \frac{\binom{10}{3}\binom{20}{2}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{10}{4}\binom{20}{1}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{10}{5}\binom{20}{5}}{\binom{30}{0}} = 0.1912
\end{aligned}
$$

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> pa <- pbinom(2, size=5, prob=1/5, lower=FALSE)
> pb <- pgeom(2, prob=4/5, lower=FALSE)
> pc <- pnbinom(2, size=3, prob=4/5, lower=FALSE)
> pd <- phyper(2, m=10, n=20, k=5, lower=FALSE)
```
