

CE-003: Estatística II - Turma K/O  
Avaliações Semanais (2º semestre 2015)

Semana 5 (av-01)

1. Um indivíduo vai participar de uma competição que consiste em responder questões que são lhe são apresentadas sequencialmente. Com o nível de conhecimento que possui, a chance de acertar uma questão escolhida ao acaso é de 75%. Neste contexto, para cada diferente situação apresentada a seguir, defina a variável aleatória, sua distribuição de probabilidades e calcule a probabilidade solicitada. Se preciso, faça suposições necessárias e adequadas em cada caso.

- (a) Se for responder até errar uma pergunta, qual a probabilidade de conseguir acertar quatro ou mais questões?
- (b) Se for responder cinco perguntas, qual a probabilidade de acertar quatro ou mais?
- (c) Se for responder até acertar a terceira pergunta, qual a probabilidade de errar apenas uma?
- (d) Se o candidato selecionar aleatoriamente seis questões de um banco de 40 questões das quais o candidato sabe a resposta de 30 delas (75%), qual a probabilidade de acertar ao menos cinco delas.

Ainda neste contexto considere que o candidato responde, em média, 1,8 questões por minuto.

- (e) Qual a probabilidade de conseguir responder ao menos três questões em três minutos?

**Solução:**

(a)

$X$  : Número de acertos até o primeiro erro

$X \sim G(0, 25)$

$$P[X \geq 4] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - \sum_{i=0}^3 (1 - 0,25)^i (0,25) = 0.316$$

(b)

$X$  : Número de acertos em cinco perguntas

$X \sim B(n = 5, p = 0,75)$

$$P[X \geq 4] = P[X = 4] + P[X = 5] = \sum_{i=4}^5 \binom{5}{i} 0,75^i (1 - 0,75)^{5-i} = 0.633$$

(c)

$X$  : Número de erros até o terceiro acerto

$X \sim BN(r = 3, p = 0,75)$

$$P[X = 1] = \binom{3+1-1}{3-1} 0,75^3 (1 - 0,75)^1 = 0.316$$

(d)

$X$  : Número de acertos nas seis questões selecionadas

$X \sim HG(30, 10, 6)$

$$P[X \geq 5] = P[X = 5] + P[X = 6] = \sum_{i=5}^6 \frac{\binom{30}{i} \binom{10}{6-i}}{\binom{40}{6}} = 0.526$$

(e)

$X$  : Número de questões respondidas em 3 minutos

$X \sim P(3 \cdot 1,8 = 5,4)$

$$P[X \geq 3] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - \sum_{i=0}^2 \frac{e^{-5,4} 5,4^i}{i!} = 0.905$$

1. Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2/8 & 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Mostre que  $f(x)$  é uma função de densidade de probabilidade válida.  
 (b) Obtenha  $P[0,5 < X < 1,5]$ .  
 (c) Obtenha  $P[X > 1,2]$ .  
 (d) Obtenha  $P[X > 1,2|X > 0,5]$ .  
 (e) Obtenha o valor esperado de  $X$ .

**Solução:**

(a)

$$\text{Mostrar que: } f(x) \geq 0 \forall x \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x)dx = 1$$

$$\frac{3}{8} \frac{2^3 - 0^3}{3} = 1$$

a função acumulada  $F(x)$  é dada por:

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{3}{8} \frac{x^3 - 0^3}{3} = \frac{x^3}{8}$$

$$(b) P[0,5 < X < 1,5] = \int_{0,5}^{1,5} f(x)dx = F(1,5) - F(0,5) = 0.406$$

$$(c) P[X > 1,2] = \int_{1,2}^2 f(x)dx = 1 - F(1,2) = 0.784$$

$$(d) P[X > 1,2|X > 0,5] = \frac{\int_{1,2}^2 f(x)dx}{\int_{0,5}^2 f(x)dx} = \frac{1 - F(1,2)}{1 - F(0,5)} = 0.796$$

(e)

$$E[X] = \int_0^2 x \cdot f(x)dx = \frac{3}{8} \left[ \frac{2^4 - 0^4}{4} \right] = \frac{3}{2} = 1,5$$

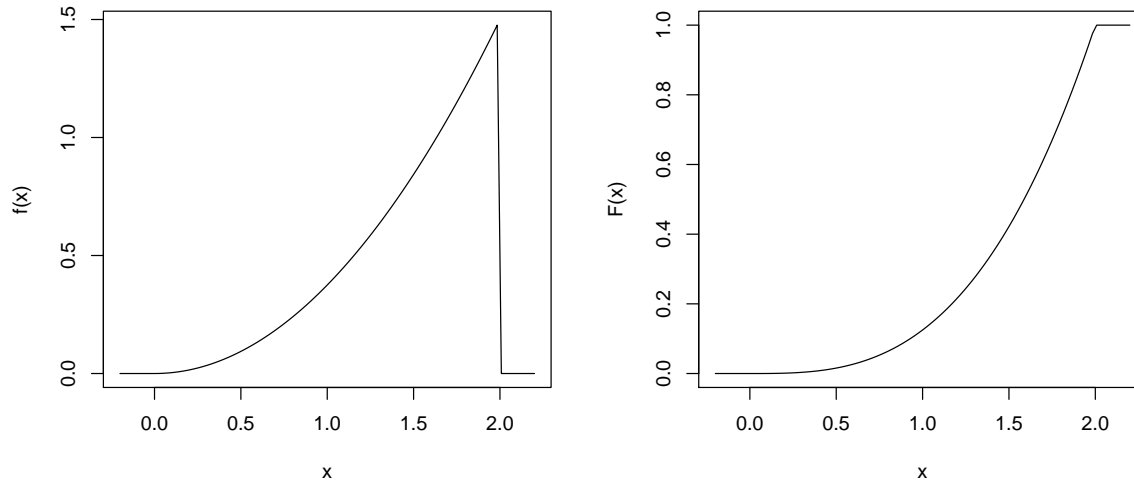


Figura 1: Função de densidade de probabilidade (esquerda) e função de distribuição (direita).

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> require(MASS)
> ## a)
> fx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 2, (3*x^2)/8, 0)
> integrate(fx, 0, 2)$value
```

[1] 1

```

> Fx <- function(x) ifelse(x>0, ifelse(x<=2, (x^3)/8,1), 0)
> Fx(2)
[1] 1
> ## b)
> integrate(fx, 0.5, 1.5)$value
[1] 0.4062
> Fx(1.5)-Fx(0.5)
[1] 0.4062
> ##c)
> integrate(fx, 1.2, 2)$value
[1] 0.784
> 1-Fx(1.2)
[1] 0.784
> ## d)
> integrate(fx, 1.2, 2)$value/integrate(fx, 0.5, 2)$value
[1] 0.7964
> (1-Fx(1.2))/(1-Fx(0.5))
[1] 0.7964
> ## e)
> efx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 2, x*(3*x^2)/8, 0)
> integrate(efx, 0, 2)$value
[1] 1.5

```

## Semana 8 (av-03)

- Seja uma v.a.  $X$  com distribuição normal de média  $\mu = 250$  e variância  $\sigma^2 = 225$ . Obtenha:
  - $P[X > 270]$ .
  - $P[X < 220]$ .
  - $P[|X - \mu| > 25]$ .
  - $P[|X - \mu| < 30]$ .
  - $P[X < 270 | X > 250]$ .
  - o valor  $x_1$  tal que  $P[X > x_1] = 0,80$ .
  - o valor  $x_2$  tal que  $P[X < x_2] = 0,95$ .
  - qual deveria ser um novo valor da média  $\mu$  para que  $P[X < 240] \leq 0,10$  ?
  - com  $\mu = 250$  qual deveria ser um novo valor da variância  $\sigma^2$  para que  $P[X < 240] \leq 0,10$  ?
  - qual deveria ser um novo valor da variância  $\sigma^2$  para que  $P[|X - \mu| > 15] \leq 0,10$  ?

### Solução:

$$X \sim N(250, 15^2)$$

- $P[X > 270] = P[Z > \frac{270-250}{15}] = P[Z > 1.3333] = 0.0912$
- $P[X < 220] = P[Z < \frac{220-250}{15}] = P[Z < -2] = 0.0228$
- $P[|X - \mu| > 25] = P[X < 225 \cup X > 275] = P[X < -1.667] + P[X > 1.667] = 0.0956$
- $P[|X - \mu| < 30] = P[220 < X < 280] = P[-2 < X < 2] = 0.9545$
- $P[X < 270 | X > 250] = \frac{P[250 < X < 270]}{P[X > 250]} = \frac{0.4088}{0.5} = 0.8176$
- $z = \frac{x_1 - 250}{15} = -0.842 \rightarrow x_1 = 237.4$
- $z = \frac{x_2 - 250}{15} = 1.645 \rightarrow x_2 = 274.7$
- $z = \frac{240 - \mu}{15} = -1.282 \rightarrow \mu = 259.2$
- $z = \frac{240 - 250}{\sigma} = -1.282 \rightarrow \sigma = 7.8 \rightarrow \sigma^2 = 60.8$
- $P[|X - \mu| > 15] = P[X < \mu - 15 \cup X > \mu + 15] \leq 0,10 \rightarrow z = \frac{15}{\sigma} = 1.645 \rightarrow \sigma = 9.1 \rightarrow \sigma^2 = 83.1$

Comandos em R para soluções:

```
> (qa <- pnorm(270, mean=250, sd=15, lower=FALSE))
```

```

[1] 0.09121
> (qb <- pnorm(220, mean=250, sd=15))
[1] 0.02275
> (qc <- 2*pnorm(250-25, mean=250, sd=15))
[1] 0.09558
> (qd <- diff(pnorm(c(250-30,250+30), mean=250, sd=15)))
[1] 0.9545
> (qe <- diff(pnorm(c(250,270), mean=250, sd=15))/pnorm(250, mean=250, sd=15, lower=FALSE))
[1] 0.8176
> (qf <- qnorm(0.80, mean=250, sd=15, lower=FALSE))
[1] 237.4
> (qg <- qnorm(0.95, mean=250, sd=15))
[1] 274.7
> (qh <- 240 - 15 * round(qnorm(0.10), dig=3))
[1] 259.2
> (qi <- (240 - 250)/round(qnorm(0.10), dig=3))
[1] 7.8
> (qj <- 15/round(qnorm(0.95), dig=3))
[1] 9.119

```

#### Semana 9 (av-04)

1. Foi feita uma pesquisa sobre as condições salariais de professores de um certo estado. Os dados foram organizados em uma tabela. A seguir é mostrada uma pequena fração dos dados. A descrição dos atributos anotados está na Tabela abaixo.

Degree	Rank	Sex	Year	YSdeg	Salary
1	1	3	0	25	35 36350
2	1	3	0	13	22 35350
3	1	3	0	10	23 28200
4	1	3	1	7	27 26775
5	0	3	0	19	30 33696
6	1	3	0	16	21 28516

Atributo	Descrição
Degree	Formação: 1: Doutorado, 0: Mestrado
Rank	Cargo (1: Prof Assistente, 2: Prof Associado, 3: Prof Pleno)
Sex	1: feminino, 0: masculino
Year	Anos de trabalho
YSdeg	Anos desde a obtenção da maior titulação
Salary	Salário em dolares por ano

- (a) Classifique cada um dos atributos (variáveis).
- (b) Esboce um gráfico adequado para resumir cada um dos atributos individualmente
- (c) Como voce investigaria (por exemplo, que tipo de gráfico) se existe relação entre:
  - i. Sexo e Formação
  - ii. Sexo e Salário
  - iii. Anos de trabalho e salário

#### Solução:

- (a) Sex: Qualitativa nominal  
Degree, Rank: Qualitativa ordinal  
Anos de trabalho\*, tempo de titulação\*: contínua (mas podendo ser tratada como discreta)  
salário: contínua
- (b) Esboce um gráfico adequado para resumir cada um dos atributos individualmente

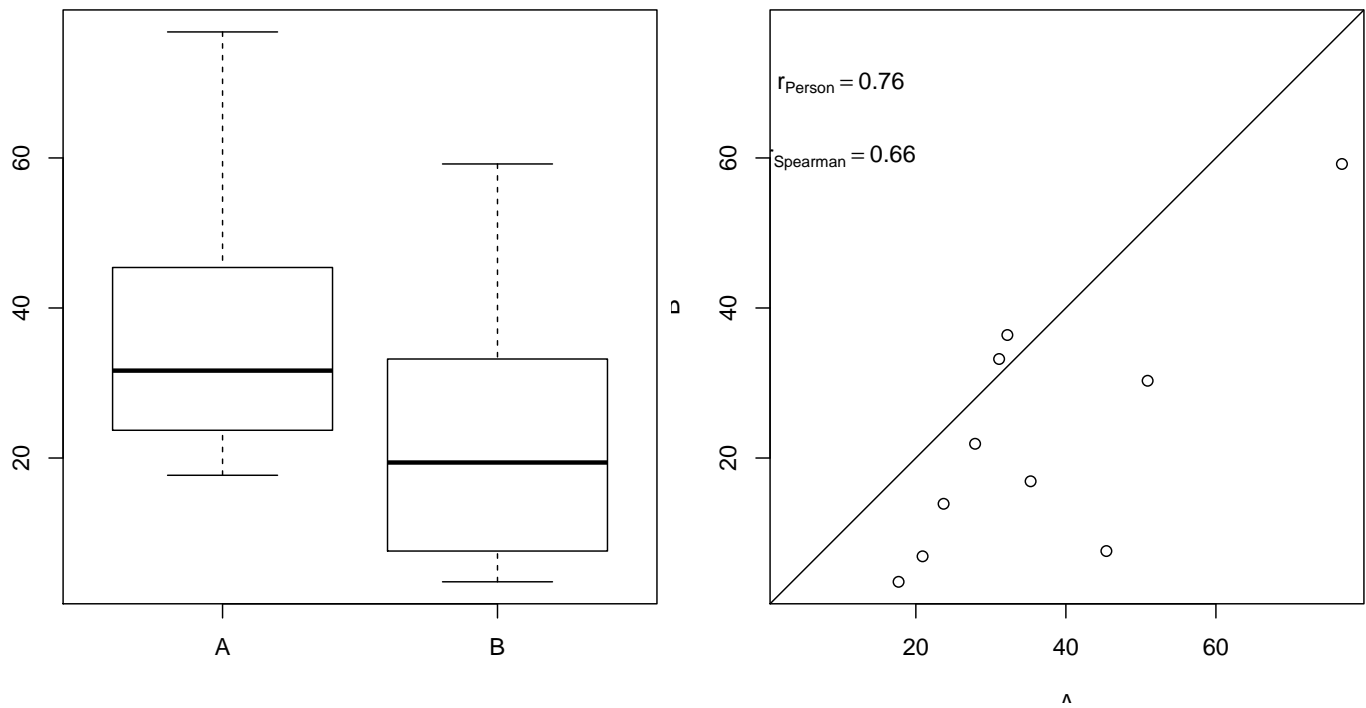


Figura 2: Box-plot e diagrama de dispersão dos tempos de processamento de dois algoritmos aplicados a um mesmo conjunto de problemas

Semana 11 (av-05)

- Um conjunto de imagens foi submetido a dois algoritmos ( $A$  e  $B$ ) de tratamento (filtragem, correção e classificação) e foram registrados os tempos de processamento. Alguns resumos dos dados encontram-se a seguir.

$$\bar{x}_A = 36.19 \quad \bar{x}_B = 22.98$$

$$S_A = 17.62 \quad S_B = 17.14$$

Responda as questões a seguir baseando-se nos resumos dados e justificando as respostas.

- Compare os desempenhos algoritmos.
- Existem observações discrepantes (atípicas)?
- Como voce descreveria a relação e correlação entre o desempenho dos algoritmos?
- Os algoritmos possuem variabilidades relativas, medida pelo coeficiente de variação, semelhantes?
- Os algoritmos possuem variabilidades, medida pela amplitude interquartilica, semelhantes?