# CE-003: Estatística II - Turma K/O
# Avaliações Semanais ($2^o$ semestre 2015)

Semana 5 (av-01)

1. Um indivíduo vai participar de uma competição que consiste em responder questões que são lhe são apresentadas sequencialmente. Com o nível de conhecimento que possui, a chance de acertar uma questão escolhida ao acaso é de 75% . Neste contexto, para cada diferente situação apresentada a seguir, defina a variável aleatória, sua distribuição de probabilidades e calcule a probabilidade solicitada. Se preciso, faça suposições necessárias e adequadas em cada caso.
   (a) Se for responder até errar uma pergunta, qual a probabilidade de conseguir acertar quatro ou mais questões?
   (b) Se for responder cinco perguntas, qual a probabilidade de acertar quatro ou mais?
   (c) Se for responder até acertar a terceira pergunta, qual a probabilidade de errar apenas uma?
   (d) Se o candidato selecionar aleatoriamente seis questões de um banco de 40 questões das quais o candidato sabe a resposta de 30 delas (75%), qual a probabilidade de acertar ao menos cinco delas.

   Ainda neste contexto considere que o candidato responde, em média, 1,8 questões por minuto.

   (e) Qual a probabilidade de conseguir responder ao menos três questões em três minutos?

   **Solução:**

   (a)

$$X : \text{Número de acertos até o primeiro erro}$$
$$X \sim \mathrm{G}(0,25)$$
$$P[X \geq 4] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - \sum_{i=0}^{1} (1-0,25)^i (0,25) = 0.316$$

   (b)

$$X : \text{Número de acertos em cinco perguntas}$$
$$X \sim \mathrm{B}(\mathrm{n}=5, \mathrm{p}=0,75)$$
$$P[X \geq 4] = P[X=4] + P[X=5] = \sum_{i=4}^{5} \binom{5}{i} 0,75^i (1-0,75)^{5-i} = 0.633$$

   (c)

$$X : \text{Número de erros até o terceito acerto}$$
$$X \sim \mathrm{BN}(\mathrm{r}=3, \mathrm{p}=0,75)$$
$$P[X=1] = \binom{3+1-1}{3-1} 0,75^3 (1-0,75)^1 = 0.316$$

   (d)

$$X : \text{Número de acertos nas seis questões selecionadas}$$
$$X \sim \mathrm{HG}(30,10,6)$$
$$P[X \geq 5] = P[X=5] + P[X=6] = \sum_{i=5}^{6} \frac{\binom{30}{i}\binom{10}{6-i}}{\binom{40}{6}} = 0.526$$

   (e)

$$X : \text{Número de questões respondidas em 3 minutos}$$
$$X \sim \mathrm{P}(3 \cdot 1,8 = 5,4)$$
$$P[X \geq 3] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{\mathrm{e}^{-5,4} 5,4^{\mathrm{i}}}{i!} = 0.905$$

---

1. Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2/8 & 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade válida.
(b) Obtenha $P[0,5 < X < 1,5]$.
(c) Obtenha $P[X > 1,2]$.
(d) Obtenha $P[X > 1,2 | X > 0,5]$.
(e) Obtenha o valor esperado de $X$.

**Solução:**

(a)

$$\text{Mostrar que: } f(x) \geq 0 \;\forall x \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\frac{3}{8}\frac{2^3 - 0^3}{3} = 1$$

$$\text{a função acumulada } F(x) \text{ é dada por:} F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\frac{x^3 - 0^3}{3} = \frac{x^3}{8}$$

(b) $P[0,5 < X < 1,5] = \int_{0,5}^{1,5} f(x)\mathrm{d}x = F(1,5) - F(0,5) = 0.406$

(c) $P[X > 1,2] = \int_{1,2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(1,2) = 0.784$

(d) $P[X > 1,2 | X > 0,5] = \frac{\int_{1,2}^{2} f(x)\mathrm{d}x}{\int_{0,5}^{2} f(x)\mathrm{d}x} = \frac{1-F(1,2)}{1-F(0,5)} = 0.796$

(e)

$$E[X] = \int_0^2 x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{8}[\frac{2^4 - 0^4}{4}] = \frac{3}{2} = 1,5$$

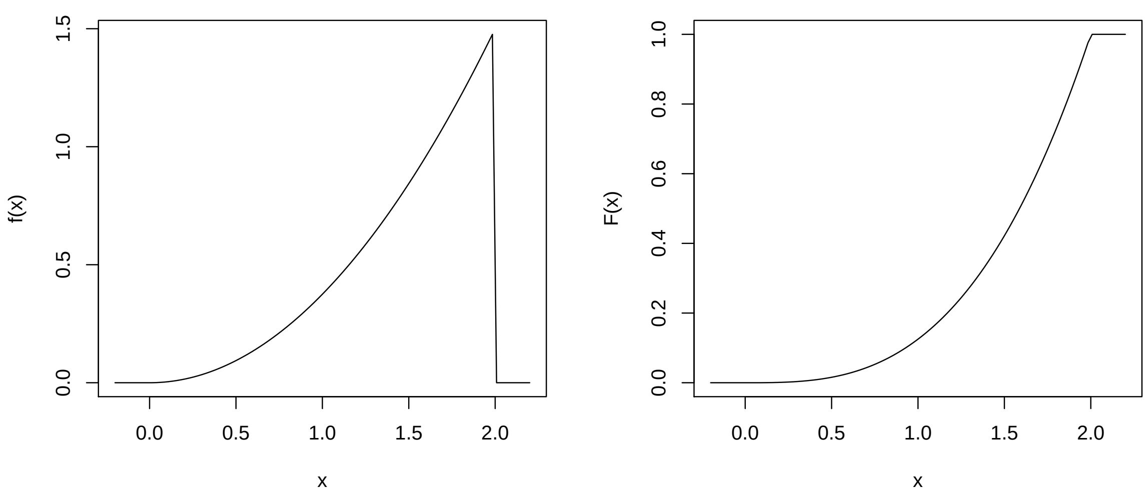


Figura 1: Função de densidade de probabilidade (esquerda) e função de distribuição (direita).

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> require(MASS)
> ## a)
> fx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 2, (3*x^2)/8, 0)
> integrate(fx, 0, 2)$value
[1] 1
> Fx <- function(x) ifelse(x>0, ifelse(x<=2, (x^3)/8,1), 0)
> Fx(2)
```

```
[1] 1
> ## b)
> integrate(fx, 0.5, 1.5)$value
[1] 0.4062
> Fx(1.5)-Fx(0.5)
[1] 0.4062
> ##c)
> integrate(fx, 1.2, 2)$value
[1] 0.784
> 1-Fx(1.2)
[1] 0.784
> ## d)
> integrate(fx, 1.2, 2)$value/integrate(fx, 0.5, 2)$value
[1] 0.7964
> (1-Fx(1.2))/(1-Fx(0.5))
[1] 0.7964
> ## e)
> efx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 2, x*(3*x^2)/8, 0)
> integrate(efx, 0, 2)$value
[1] 1.5
```

---

Semana 8 (av-03)

1. Seja uma v.a. $X$ com distribuição normal de média $\mu = 250$ e variância $\sigma^2 = 225$. Obtenha:
   (a) $P[X > 270]$.
   (b) $P[X < 220]$.
   (c) $P[|X - \mu| > 25]$.
   (d) $P[|X - \mu| < 30]$.
   (e) $P[X < 270|X > 250]$.
   (f) o valor $x_1$ tal que $P[X > x_1] = 0,80$.
   (g) o valor $x_2$ tal que $P[X < x_2] = 0,95$.
   (h) qual deveria ser um novo valor da média $\mu$ para que $P[X < 240] \leq 0,10$ ?
   (i) com $\mu = 250$ qual deveria ser um novo valor da variância $\sigma^2$ para que $P[X < 240] \leq 0,10$ ?
   (j) qual deveria ser um novo valor da variância $\sigma^2$ para que $P[|X - \mu| > 15] \leq 0,10$ ?

**Solução:**

$$X \sim \mathrm{N}(250, 15^2)$$

(a) $P[X > 270] = P[Z > \frac{270-250}{15}] = P[Z > 1.3333] = 0.0912$
(b) $P[X < 220] = P[Z < \frac{220-250}{15}] = P[Z < -2] = 0.0228$
(c) $P[|X - \mu| > 25] = P[X < 225 \cup X > 275] = P[X < -1.667] + P[X > 1.667] = 0.0956$
(d) $P[|X - \mu| < 30] = P[220 < X < 280] = P[-2 < X < 2] = 0.9545$
(e) $P[X < 270|X > 250] = \frac{P[250<X<270]}{P[X>250]} = \frac{0.4088}{0.5} = 0.8176$
(f) $z = \frac{x_1-250}{15} = -0.842 \longrightarrow x_1 = 237.4$
(g) $z = \frac{x_2-250}{15} = 1.645 \longrightarrow x_2 = 274.7$
(h) $z = \frac{240-\mu}{15} = -1.282 \longrightarrow \mu = 259.2$
(i) $z = \frac{240-250}{\sigma} = -1.282 \longrightarrow \sigma = 7.8 \longrightarrow \sigma^2 = 60.8$
(j) $P[|X < \mu| > 15] = P[X < \mu - 15 \cup X > \mu + 15] \leq 0,10 \longrightarrow z = \frac{15}{\sigma} = 1.645 \longrightarrow \sigma = 9.1 \longrightarrow \sigma^2 = 83.1$

Comandos em R para soluções:

```
> (qa <- pnorm(270, mean=250, sd=15, lower=FALSE))
[1] 0.09121
> (qb <- pnorm(220, mean=250, sd=15))
```

```
[1] 0.02275
> (qc <- 2*pnorm(250-25, mean=250, sd=15))
[1] 0.09558
> (qd <- diff(pnorm(c(250-30,250+30), mean=250, sd=15)))
[1] 0.9545
> (qe <- diff(pnorm(c(250,270), mean=250, sd=15))/pnorm(250, mean=250, sd=15, lower=FALSE))
[1] 0.8176
> (qf <- qnorm(0.80, mean=250, sd=15, lower=FALSE))
[1] 237.4
> (qg <- qnorm(0.95, mean=250, sd=15))
[1] 274.7
> (qh <- 240 - 15 * round(qnorm(0.10), dig=3))
[1] 259.2
> (qi <- (240 - 250)/round(qnorm(0.10), dig=3))
[1] 7.8
> (qj <- 15/round(qnorm(0.95), dig=3))
[1] 9.119
```