CE-003: Estatística II - Turma K/O
Avaliações Semanais (2^o semestre 2015)

Semana 5 (av-01)

1. Um indivíduo vai participar de uma competição que consiste em responder questões que são lhe são apresentadas sequencialmente. Com o nível de conhecimento que possui, a chance de acertar uma questão escolhida ao acaso é de 75% . Neste contexto, para cada diferente situação apresentada a seguir, defina a variável aleatória, sua distribuição de probabilidades e calcule a probabilidade solicitada. Se preciso, faça suposições necessárias e adequadas em cada caso.
   (a) Se for responder até errar uma pergunta, qual a probabilidade de conseguir acertar quatro ou mais questões?
   (b) Se for responder cinco perguntas, qual a probabilidade de acertar quatro ou mais?
   (c) Se for responder até acertar a terceira pergunta, qual a probabilidade de errar apenas uma?
   (d) Se o candidato selecionar aleatoriamente seis questões de um banco de 40 questões das quais o candidato sabe a resposta de 30 delas (75%), qual a probabilidade de acertar ao menos cinco delas.

   Ainda neste contexto considere que o candidato responde, em média, 1,8 questões por minuto.
   (e) Qual a probabilidade de conseguir responder ao menos três questões em três minutos?

   Solução:

   (a)

$$\begin{aligned}&X : \text{Número de acertos até o primeiro erro}\\&X \sim \mathrm{G}(0,25)\end{aligned}$$

$$P[X \geq 4] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - \sum_{i=0}^{1} (1-0,25)^i (0,25) = 0.316$$

   (b)

$$\begin{aligned}&X : \text{Número de acertos em cinco perguntas}\\&X \sim \mathrm{B}(\mathrm{n}=5, \mathrm{p}=0,75)\end{aligned}$$

$$P[X \geq 4] = P[X=4] + P[X=5] = \sum_{i=4}^{5} \binom{5}{i} 0,75^i (1-0,75)^{5-i} = 0.633$$

   (c)

$$\begin{aligned}&X : \text{Número de erros até o terceito acerto}\\&X \sim \mathrm{BN}(\mathrm{r}=3, \mathrm{p}=0,75)\end{aligned}$$

$$P[X=1] = \binom{3+1-1}{3-1} 0,75^3 (1-0,75)^1 = 0.316$$

   (d)

$$\begin{aligned}&X : \text{Número de acertos nas seis questões selecionadas}\\&X \sim \mathrm{HG}(30,10,6)\end{aligned}$$

$$P[X \geq 5] = P[X=5] + P[X=6] = \sum_{i=5}^{6} \frac{\binom{30}{i}\binom{10}{6-i}}{\binom{40}{6}} = 0.526$$

   (e)

$$\begin{aligned}&X : \text{Número de questões respondidas em 3 minutos}\\&X \sim \mathrm{P}(3 \cdot 1,8 = 5,4)\end{aligned}$$

$$P[X \geq 3] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{\mathrm{e}^{-5,4} 5,4^{\mathrm{i}}}{i!} = 0.905$$

Semana 7 (av-02)

1. Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2/8 & 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Mostre que $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade válida.
   (b) Obtenha $P[0,5 < X < 1,5]$.
   (c) Obtenha $P[X > 1,2]$.
   (d) Obtenha $P[X > 1,2 | X > 0,5]$.
   (e) Obtenha o valor esperado de X.

Solução:

(a)

$$\text{Mostrar que: } f(x) \geq 0 \ \forall x \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\frac{3}{8}\frac{2^3 - 0^3}{3} = 1$$

$$\text{a função acumulada } F(x) \text{ é dada por:} F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\frac{x^3 - 0^3}{3} = \frac{x^3}{8}$$

(b) $P[0,5 < X < 1,5] = \int_{0,5}^{1,5} f(x)\mathrm{d}x = F(1,5) - F(0,5) = 0.406$

(c) $P[X > 1,2] = \int_{1,2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(1,2) = 0.784$

(d) $P[X > 1,2 | X > 0,5] = \frac{\int_{1,2}^{2} f(x)\mathrm{d}x}{\int_{0,5}^{2} f(x)\mathrm{d}x} = \frac{1-F(1,2)}{1-F(0,5)} = 0.796$

(e)

$$E[X] = \int_0^2 x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{8}[\frac{2^4 - 0^4}{4}] = \frac{3}{2} = 1,5$$

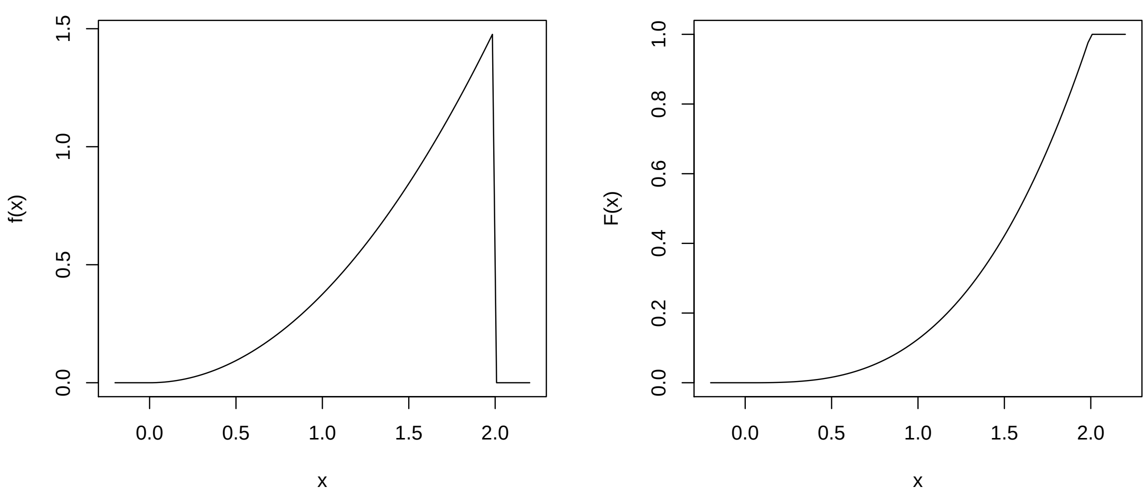

Figura 1: Função de densidade de probabilidade (esquerda) e função de distribuição (direita).

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> require(MASS)
> ## a)
> fx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 2, (3*x^2)/8, 0)
> integrate(fx, 0, 2)$value
[1] 1
> Fx <- function(x) ifelse(x>0, ifelse(x<=2, (x^3)/8,1), 0)
> Fx(2)
```

```
[1] 1

> ## b)
> integrate(fx, 0.5, 1.5)$value

[1] 0.4062

> Fx(1.5)-Fx(0.5)

[1] 0.4062

> ##c)
> integrate(fx, 1.2, 2)$value

[1] 0.784

> 1-Fx(1.2)

[1] 0.784

> ## d)
> integrate(fx, 1.2, 2)$value/integrate(fx, 0.5, 2)$value

[1] 0.7964

> (1-Fx(1.2))/(1-Fx(0.5))

[1] 0.7964

> ## e)
> efx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 2, x*(3*x^2)/8, 0)
> integrate(efx, 0, 2)$value

[1] 1.5
```
