

CE-003: Estatística II - Turma K/O

Avaliações Semanais (2º semestre 2014)

Semana 3 (av-01)

1. Um modelo simplificado do sistema de tipo sanguíneo humano possui quatro tipos de sangue: A , B , AB e O . Existem dois antígenos, anti- A e anti- B que reagem com o sangue de uma pessoa de diferentes formas de acordo com o tipo sanguíneo do indivíduo. Anti- A reage com tipos sanguíneos A a AB , mas não com B e O . Anti- B reage com tipos sanguíneos B a AB , mas não com A e O . Suponha que uma amostra de sangue de uma pessoa é coletada e testada com os dois antígenos. Denote por A o evento que o sangue reage com anti- A e por B o evento que o sangue reage com anti- B .
 - (a) Classifique os possíveis tipos de sangue da pessoa usando a notação de eventos A e B e seus complementares. Suponha agora que, para uma determinada pessoa, a probabilidade de possuir o tipo O é de 0,50, a probabilidade do tipo A é 0,34 e a probabilidade do tipo B é de 0,12.
 - (b) Encontre a probabilidade de que ambos antígenos sejam reagentes com o sangue da pessoa.
 - (c) Encontre a probabilidade de que cada um dos antígenos vá reagir com o sangue da pessoa.
 - (d) Sabendo que o sangue de uma pessoa reagiu com anti- A , qual a probabilidade de que a pessoa tenha sangue do tipo AB ?
 - (e) Os eventos A e B são mutuamente exclusivos? Justifique.
 - (f) Os eventos A e B são independentes? Justifique.

Solução:

Notação:

A : a amostra reage a anti- A

B : a amostra reage a anti- B

(a)

Tabela 1: Tipos sanguíneos, eventos que os definem e probabilidades de cada tipo.

Tipo sanguíneo	Evento	Probabilidade
O	$A^c \cap B^c$	0,50
A	$A \cap B^c$	0,34
B	$A^c \cap B$	0,12
AB	$A \cap B$	0,04

(b)

$$P[AB] = P[A \cap B] = 1 - P[O] - P[A] - P[B] = 0,04$$

(c)

$$P[A] = P[A \cap B^c] + P[A \cap B] = 0,34 + 0,04 = 0,38$$

$$P[B] = P[A^c \cap B] + P[A \cap B] = 0,12 + 0,04 = 0,16$$

(d)

$$P[(A \cap B)|P(A)] = \frac{P[(A \cap B) \cap (A)]}{P[A]} = \frac{P[(A \cap B)]}{P[A]} = \frac{0,04}{0,38} = 2/19 = 0.105$$

(e) Não, pois $P[A \cap B] = 0,04 \neq 0$

(f) Não, pois $P[A \cap B] = 0,04 \neq P[A] \cdot P[B] = 0,38 \cdot 0.16 = 0.0608$

Semana 4 (av-02)

1. Três algoritmos diferentes são utilizados, de forma independente, para tentar encontrar a solução ótima de um problema. Sabe-se que o primeiro algoritmo tem uma taxa de acerto de 75%, o segundo tem 60% e o terceiro tem 85%.

- Qual a probabilidade do problema ser resolvido?
- Qual a probabilidade de que a solução ótima seja encontrada por mais de um algoritmo?
- Qual a probabilidade de não seja encontrada a solução ótima de um problema submetido aos três algoritmos?

Procure usar a notação de eventos e operação de eventos no desenvolvimento de sua solução.

Solução:

(a)

A : o primeiro resolve o problema $P(A) = 0,75$ $P(\bar{A}) = 0,25$

B : o segundo resolve o problema $P(B) = 0,60$ $P(\bar{B}) = 0,40$

C : o terceiro resolve o problema $P(C) = 0,85$ $P(\bar{C}) = 0,15$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \stackrel{ind}{=} 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = 1 - (1 - 0,75)(1 - 0,60)(1 - 0,85) = 0,985$$

(b) $P(A \cap B \cap \bar{C}) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \stackrel{ind}{=} P[A] \cdot P[B] \cdot P[\bar{C}] + P[A] \cdot P[\bar{B}] \cdot P[C] + P[\bar{A}] \cdot P[B] \cdot P[C] + P[A] \cdot P[B] \cdot P[C] = 0,75 \cdot 0,60 \cdot 0,15 + 0,75 \cdot 0,40 \cdot 0,85 + 0,25 \cdot 0,60 \cdot 0,85 + 0,75 \cdot 0,60 \cdot 0,85 = 0,832$

(c) $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \stackrel{ind}{=} P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = (1 - 0,75)(1 - 0,60)(1 - 0,85) = 0,015$

2. Sabe-se a partir de históricos que 25% das requisições de transferências de dados em um sistema são recusadas. Há interesse em se estudar possíveis padrões de falhas o que é feito contando-se o número de falhas consecutivas até o sucesso no envio.

- Qual a probabilidade de que ocorram três ou mais falhas consecutivas em um tentativa de envio?
- Identifique neste problema a variável aleatória de interesse e seus possíveis valores
- Mostre as probabilidades associadas a alguns dos valores desta variável.
- Identifique uma equação que forneça os valores das probabilidades para os diferentes valores da variável.

Solução:

Eventos:

S : sucesso na transferência

$F \equiv \bar{S}$: falha na transferência

OBS: supõem-se independência entre as tentativas.

(a)

$$P[3 \text{ ou mais falhas}] = 1 - P[2 \text{ ou menos falhas}] = 1 - \{P[0 \text{ falhas}] + P[1 \text{ falha}] + P[2 \text{ falhas}]\} \\ = 1 - \{P[S] + P[F \cap S] + P[F \cap F \cap S]\} = 1 - [0,75 + 0,25 \cdot 0,75 + 0,25^2 \cdot 0,75] = 0,0156$$

(b)

X : número de falhas até conseguir o envio

$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

(c)

x	0	1	2	3	...
$P[X=x]$	0,75	0,25 · 0,75	0,25 ² · 0,75	0,25 ³ · 0,75	...

(d) $P[X = x] = 0,25^x \cdot 0,75$

De forma mais geral a variável segue a distribuição chamada de *geométrica* com probabilidade p de sucesso:

X : número de “falhas” até o primeiro “sucesso”

$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$X \sim G(p)$$

$$P[X = x] = (1 - p)^x p$$

Semana 5 (av-03)

1. Seja a função de densidade de probabilidade dada por $f(x) = Cx^2 I_{[0,4]}(x)$. Obtenha:

(a) o valor de C ,

(b) $P[X > 0,5]$,

(c) $P[X > 0,7 | X > 0,5]$,

(d) Calcule o valor que resulta de $\int_0^4 x \cdot f(x) dx$. Você consegue associar alguma interpretação a este valor?

(e) Calcule o valor de x para o qual $P[X < x] = P[X > x] = 0,5$.

Solução:

$$f(x) = Cx^2 I_{[0,4]}(x)$$

(a)

$$\int_0^4 f(x) dx = 1$$

$$\int_0^4 Cx^2 dx = 1$$

$$C = \frac{1}{\int_0^4 x^2 dx}$$

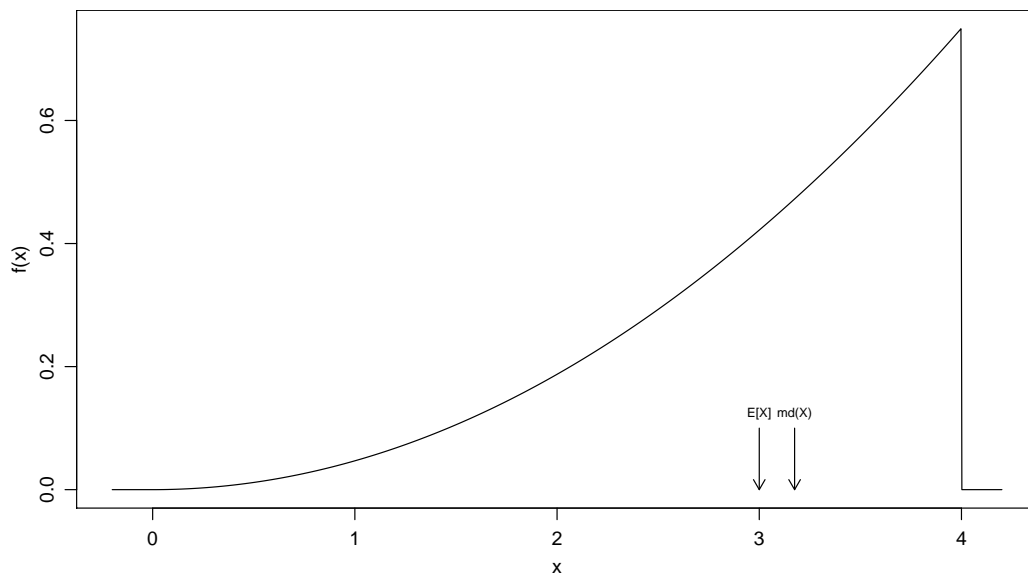
$$C = 3/64$$

$$(b) P[X > 0,5] = \int_{0,5}^4 Cx^2 dx = 0.998$$

$$(c) P[X > 0,7 | X > 0,5] = \frac{P[X > 0,7 \cap X > 0,5]}{P[X > 0,5]} = \frac{P[X > 0,7]}{P[X > 0,5]} = \frac{\int_{0,7}^4 Cx^2 dx}{\int_{0,5}^4 Cx^2 dx} = 0.997$$

$$(d) E(X) = \int_0^4 x \cdot f(x) dx = (3/64) \int_0^4 x^3 dx = \dots = 3$$

$$(e) \text{md}(x) : \int_0^{\text{md}(x)} f(x) dx = 0,50 \rightarrow \text{md}(x) = (64 \cdot 0,50)^{1/3} = 3.17$$



Semana 6 (av-04)

1. Nos problemas a seguir identifique a variável aleatória, seus possíveis valores, a distribuição de probabilidades e calcule as quantidades pedidas, fazendo suposições adequadas quando necessário.
 - (a) Sabe-se que em um determinado lote de 50 peças de *hardware* 15 delas são defeituosas. Se três peças serão escolhidas ao acaso, qual a probabilidade de que (i) nenhuma seja defeituosa? (ii) todas sejam defeituosas?
 - (b) Em um serviço de televendas potenciais clientes são abordados sequencialmente e 12% das chamadas resultam em uma compra. Qual a probabilidade de se conseguir fazer duas vendas em dois contatos consecutivos? (ou seja, feita uma venda, qual a probabilidade de fazer uma outra venda na tentativa seguinte?)
 - (c) Considerando ainda este serviço de televendas, qual a probabilidade de se efetuar duas ou mais vendas em dez contatos com clientes?
 - (d) Um servidor web recebe em média 7,4 requisições por hora. (i) Qual a probabilidade de que este servidor receba mais do que cinco requisições em uma determinada hora? (ii) Qual a probabilidade de que o servidor não receba requisições em um intervalo qualquer de 15 minutos?

(a)

X : número de defeituosas entre as 3 peças retiradas

$$x \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$X \sim \text{HG}(N = 50, n = 3, k = 15)$$

$$P(X = x) = \frac{\binom{15}{x} \binom{35}{3-x}}{\binom{50}{3}}$$

$$P[X = 0] = 0.334$$

$$P[X = 3] = 0.0232$$

(b)

X : número de não vendas após efetuar uma venda

$$x \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$X \sim G(p = 0, 12)$$

$$P(X = x) = (1 - 0, 12)^x \cdot 0, 12$$

$$P[X = 0] = 0.12$$

(c)

X : número de vendas em 10 contatos

$$x \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$$

$$X \sim B(n = 5, p = 0, 12)$$

$$P(X = x) = \binom{10}{x} 0, 12^x 0, 88^{10-x}$$

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] = 0.109$$

(d)

X : número de requisições

$$x \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$X_i \sim P(\lambda = 7, 4)$$

$$P(X_i = x) = \frac{e^{-7,4} 7, 4^x}{x!}$$

$$P[X_i > 5] = 1 - P[X_i \leq 5] = 0.608$$

$$X_{ii} \sim P(\lambda = 7, 4/4)$$

$$P(X_{ii} = x) = \frac{e^{-7,4/4} (7, 4/4)^x}{x!}$$

$$P[X_{ii} = 0] = 0.157$$

Soluções computacionais (em linguagem R)

```
> qa1 <- dhyper(0, m=15, n=35, k=3)
> qa2 <- dhyper(3, m=15, n=35, k=3)
> qb <- dgeom(0, prob=0.12)
> qc <- pbinom(2, size=10, prob=0.12, lower=FALSE)
> qd1 <- ppois(6, lambda=7.4, lower=FALSE)
> qd2 <- dpois(0, lambda=7.4/4)
```

Semana 7 (av-05)

1. Assume-se que o tempo entre acessos a um blog tem uma distribuição com média de 1,5 segundos. Assumindo a distribuição exponencial responda os itens a seguir.
 - (a) Quais as características do problema que fazem com que a distribuição exponencial seja uma escolha razoável?
 - (b) Qual a probabilidade de haver duas conexões com intervalo inferior a 1,5 segundos?
 - (c) Qual a probabilidade de se passarem 5 segundos sem conexão alguma?
 - (d) Tendo havido uma conexão, qual a probabilidade da próxima conexão ocorrer entre 0,5 e 2,5 segundos?
 - (e) Se já se passou 1 segundo sem conexão, qual a probabilidade de se passar mais 0,5 segundos adicionais sem conexão?
 - (f) Qual a probabilidade do intervalo entre conexões não superar 3,5 segundos se já se passaram 2 segundos sem conexão?

Solução: X : intervalo de tempo entre conexões (segundos) $X \sim \text{Exp}(\lambda = 1/1, 5 = 2/3)$

$$f(x) = \frac{2}{3}e^{-2x/3} \mathbf{I}_{(0,\infty)}(x) \quad F(x) = 1 - e^{-2x/3}$$

(a) A distribuição exponencial é razoável considerando-se que: (i) que devem ser valores positivos, (ii) pela possibilidade de cálculos com as informações fornecidas, (iii) espera-se que a probabilidade de intervalo entre conexões seja maior para pequenos intervalos e torne-se menor com o aumento do intervalo de tempo.

(b) $P[X < 1, 5] = \int_0^{1,5} f(x)dx = F(1, 5) = 0.63$

(c) $P[X > 5] = \int_5^{\infty} f(x)dx = 1 - F(5) = 0.036$

(d) $P[X < 0, 5] = \int_{0,5}^{2,5} f(x)dx = F(2, 5) - F(0, 5) = 0.53$

(e) $P[X > 1, 5 | X > 1] = \frac{\int_{1,5}^{\infty} f(x)dx}{\int_1^{\infty} f(x)dx} = {}^1P[X > 0, 5] = 1 - F(0, 5) = 0.72$

(f) $P[X < 3, 5 | X > 2] = \frac{\int_2^{3,5} f(x)dx}{\int_2^{\infty} f(x)dx} = \frac{F(3,5) - F(2)}{1 - F(2)} = {}^1P[X < 1, 5] = F(1, 5) = 0.63$

2. O peso de um tênis de corrida sofisticado é normalmente distribuído com média de 12 onças (onça é uma unidade de peso) e desvio padrão de 0,5 onças.

(a) qual a probabilidade de um tênis pesar mais que 13,2 onças?

(b) qual a probabilidade de um tênis pesar entre 11,6 e 12,7 onças?

(c) quanto deveria ser o desvio padrão para que 99,9% dos tênis tenham menos que 13 onças?

(d) se o desvio padrão se mantiver em 0,5, quanto deveria ser a média para que 99,9% dos tênis tenham menos que 13 onças?

Solução:

$$X \sim N(12, 0.5^2)$$

(a) $P[X > 13, 2] = P[Z > \frac{13,2-12}{0,5}] = P[Z > 2.4] = 0.0082$

(b) $P[11, 6 < X < 12, 7] = P[\frac{11,6-12}{0,5} < Z < \frac{12,7-12}{0,5}] = P[-0.8 < Z < 1.4] = 0.707$

(c)

$$X \sim N(12, \sigma^2)$$

$$P[X < 13] = 0,999 \quad ; \quad \sigma = ?$$

$$P[Z < \frac{13 - 12}{\sigma}] = 0,999$$

$$z = 3.09$$

$$\frac{13 - 12}{\sigma} = 3.09$$

$$\sigma = 0.324$$

(d) se o desvio padrão se mantiver em 0,5, quanto deveria ser a média para que 99,9% dos tênis tenham menos que 13 onças?

$$X \sim N(\mu, 0.5^2)$$

$$P[X < 13] = 0,999 \quad ; \quad \mu = ?$$

$$P[Z < \frac{13 - \mu}{0,5}] = 0,999$$

$$z = 3.09$$

$$\frac{13 - \mu}{0,5} = 3.09$$

$$\mu = 13 - 0,5(3.09)$$

$$\mu = 11.455$$