CE-003: Estatística II - Turma K/O
Avaliações Semanais (2^o semestre 2014)

Semana 3 (av-01

1. Um modelo simplificado do sistema de tipo sanguíneo humano possui quatro tipos de sangue: A, B, AB e O. Existem dois antígenos, anti-A e anti-B que reagem com o sangue de uma pessoa de diferentes formas de acordo com o tipo sanguíneo do indivíduo. Anti-A reage com tipos sanguíneos A a AB, mas não com B e O. Anti-B reage com tipos sanguíneos B a AB, mas não com A e O. Suponha que uma amostra de sangue de uma pessoa é coletada e testada com os dois antígeos. Denote por A o evento que o sangue reage com anti-A e por B o evento que o sangue reage com anti-B.

   (a) Classifique os possíveis tipos de sangue da pessoa usando a notação de eventos A e B e seus complementares.

   Suponha agora que, para uma determinada pessoa, a probabilidade de possuir o tipo O é de 0,50, a probabilidade do tipo A é 0,34 e a probabilidade do tipo B é de 0,12.

   (b) Encontre a probabilidade de que ambos antígenos sejam reagentes com o sangue da pessoa.
   (c) Encontre a probabilidade de que cada um dos antígenos vá reagir com o sangue da pessoa.
   (d) Sabendo que o sangue de uma pessoa reagiu com anti-A, qual a probabilidade de que a pessoa tenha sangue do tipo AB?
   (e) Os eventos A e B são mutuamente exclusivos? Justifique.
   (f) Os eventos A e B são independentes? Justifique.

   Solução:
   Notação:

$$A : \text{a amostra reage a anti-}A$$
$$B : \text{a amostra reage a anti-}B$$

   (a)

Tabela 1: Tipos sanguíneos, eventos que os definem e probabilidades de cada tipo.

Tipo sanguíneo	Evento	Probabilidade
O	$A^c \cap B^c$	$0,50$
A	$A \cap B^c$	$0,34$
B	$A^c \cap B$	$0,12$
AB	$A \cap B$	$0,04$

   (b)
$$P[AB] = P[A \cap B] = 1 - P[O] - P[A] - P[B] = 0,04$$

   (c)
$$P[A] = P[A \cap B^c] + P[A \cap B] = 0,34 + 0,04 = 0,38$$
$$P[B] = P[A^c \cap B] + P[A \cap B] = 0,12 + 0,04 = 0,16$$

   (d)
$$P[(A \cap B)|P(A)] = \frac{P[(A \cap B) \cap (A)]}{P[A]} = \frac{P[(A \cap B)]}{P[A]} = \frac{0,04}{0,38} = 2/19 = 0.105$$

   (e) Não, pois $P[A \cap B] = 0,04 \neq 0$
   (f) Não, pois $P[A \cap B] = 0,04 \neq P[A] \cdot P[B] = 0,38 \cdot 0.16 = 0.0608$

Semana 4 (av-02

1. Três algorítmos diferentes são utilizados, de forma independente, para tentar encontrar a solução ótima de um problema. Sabe-se que o primeiro algorítmo tem uma taxa de acerto de 75%, o segundo tem 60% e o terceiro tem 85%.

- Qual a probabilidade do problema ser resolvido?
- Qual a probabilidade de que a solução ótima seja encontrada por mais de um algorítmo?
- Qual a probabilidade de não seja encontrada a solução ótima de um problema submetido aos três algorítmos?

Procure usar a notação de eventos e operação de eventos no desenvolvimento de sua solução.

Solução:

(a)

$$A: \text{o primeiro resolve o problema} \quad P(A) = 0,75 \quad P(\overline{A}) = 0,25$$
$$B: \text{o segundo resolve o problema} \quad P(B) = 0,60 \quad P(\overline{B}) = 0,40$$
$$C: \text{o terceiro resolve o problema} \quad P(C) = 0,85 \quad P(\overline{C}) = 0,15$$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \overset{ind}{=} 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 1 - (1-0,75)(1-0,60)(1-0,85) = 0.985$$

(b) $P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \overset{ind}{=} P[A] \cdot P[B] \cdot P[\overline{C}] + P[A] \cdot P[\overline{B}] \cdot P[C] + P[\overline{A}] \cdot P[B] \cdot P[C] + P[A] \cdot P[B] \cdot P[C] = 0,75 \cdot 0,60 \cdot 0.15 + 0,75 \cdot 0,40 \cdot 0.85 + 0,25 \cdot 0,60 \cdot 0.85 + 0,75 \cdot 0,60 \cdot 0.85 = 0.832$

(c) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \overset{ind}{=} P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C} = (1-0,75)(1-0,60)(1-0,85) = 0.015$

---

2. Sabe-se a partir de históricos que 25% das requisições de transferências de dados em um sistema são recusadas. Há interesse em se estudar possíveis padrões de falhas o que é feito contando-se o número de falhas consecutivas até o sucesso no envio.
   - Qual a probabilidade de que ocorram três ou mais falhas consecutivas em um tentativa de envio?
   - Identifique neste problema a variável aleatória de interesse e seus possíveis valores
   - Mostre as probabilidades associadas a alguns dos valores desta variável.
   - Identifique uma equação que forneça os valores das probabilidades para os diferentes valores da variável.

   Solução:
   Eventos:

$$S: \text{ sucesso na transferência}$$
$$F \equiv \overline{S}: \text{ falha na transferência}$$

OBS: supõem-se independência entre as tentativas.

(a)

$$P[3 \text{ ou mais falhas}] = 1 - P[2 \text{ ou menos falhas}] = P[0 \text{ falhas}] + P[1 \text{ falha}] + P[2 \text{ falhas}]$$
$$= 1 - \{P[S] + P[F \cap S] + P[F \cap F \cap S]\} = 1 - [0,75 + 0,25 \cdot 0,75 + 0,25^2 \cdot 0,75] = 0.484$$

(b)

$$X: \text{número de falhas até conseguir o envio}$$
$$x \in \{0,1,2,3,4,\ldots\}$$

(c)

x	0	1	2	3	...
P[X=x]	$0,75$	$0,25 \cdot 0,75$	$0,25^2 \cdot 0,75$	$0,25^3 \cdot 0,75$	...

(d) $P[X = x] = 0,25^x 0,75$

De forma mais geral a variável segue a distribuição chamada de *geométrica* com probabilidade p de sucesso:

$$X: \text{número de “falhas” até o primeiro “sucesso”}$$
$$x \in \{0,1,2,3,4,\ldots\}$$
$$X \sim \mathrm{G}(p)$$
$$P[X = x] = (1-p)^x p$$

Semana 5 (av-03

1. Seja a função de densidade de probabilidade dada por $f(x) = Cx^2 I_{[0,4]}(x)$. Obtenha:
   (a) o valor de C,
   (b) $P[X > 0,5]$,
   (c) $P[X > 0,7 | X > 0,5]$,
   (d) Calcule o valor que resulta de $\int_0^4 x \cdot f(x) \mathrm{d}x$. Voce consegue associar alguma interpretação a este valor?
   (e) Calcule o valor de x para o qual $P[X < x] = P[X > x] = 0,5$.

Solução:

$$f(x) = Cx^2 I_{[0,4]}(x)$$

(a)

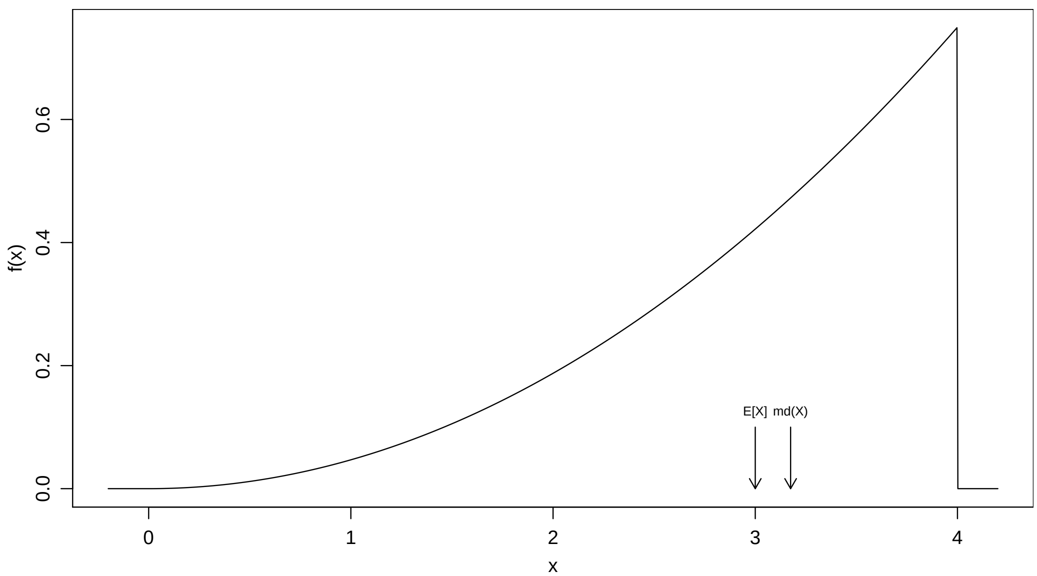
$$\int_0^4 f(x)\mathrm{dx} = 1$$
$$\int_0^4 Cx^2\mathrm{dx} = 1$$
$$C = \frac{1}{\int_0^4 x^2\mathrm{dx}}$$
$$C = 3/64$$

(b) $P[X > 0,5] = \int_{0,5}^4 Cx^2\mathrm{d}x = 0.998$

(c) $P[X > 0,7|X > 0,5] = \frac{P[X>0,7 \cap X>0,5]}{P[X>0,5]} = \frac{P[X>0,7]}{P[X>0,5]} = \frac{\int_{0,7}^4 Cx^2\mathrm{d}x}{\int_{0,5}^4 Cx^2\mathrm{d}x} = 0.997$

(d) $E(X) = \int_0^4 x \cdot f(x)\mathrm{dx} = (3/64)\int_0^4 \mathrm{x}^3\mathrm{dx} = \ldots = 3$

(e) $\mathrm{md}(x) : \int_0^{\mathrm{md}(x)} f(x)\mathrm{d}x = 0,50 \longrightarrow \mathrm{md}(x) = (64 \cdot 0,50)^{1/3} = 3.17$



Semana 6 (av-04

1. Nos problemas a seguir identifique a variável aleatória, seus possíveis valores, a distribuição de probabilidades e calcule as quantidades pedidas, fazendo suposições adequadas quando necessário.

   (a) Sabe-se que em um determinado lote de 50 peças de *hardware* 15 delas são defeituosas. Se três peças serão escolhidas ao acaso, qual a probabilidade de que (i) nenhuma seja defeituosa? (ii) todas sejam defeituosas?

   (b) Em um serviço de televendas potenciais clientes são abordados sequencialmente e 12% das chamadas resultam em uma compra. Qual a probabilidade de se conseguir fazer duas vendas em dois contatos consecutivos? (ou seja, feita uma venda, qual a probabilidade de fazer uma outra venda na tentativa seguinte?)

   (c) Considerando ainda este serviço de televendas, qual a probabilidade de se efetuar duas ou mais vendas em dez contatos com clientes?

   (d) Um servidor web recebe em média 7,4 requisições por hora. (i) Qual a probabilidade de que este servidor receba mais do que cinco requisições em uma determinada hora? (ii) Qual a probabilidade de que o servidor não receba requisições em um intervalo qualquer de 15 minutos?

(a)

$$
\begin{aligned}
X &: \text{número de defeituosas entre as 3 peças retiradas}\\
x &\in \{0,1,2,3\}\\
X &\sim \mathrm{HG}(N=50, n=3, k=15)\\
P(X=x) &= \frac{\binom{15}{x}\binom{35}{3-x}}{\binom{50}{3}}\\
P[X=0] &= 0.334\\
P[X=3] &= 0.0232
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
X &: \text{número de não vendas após efetuar uma venda}\\
x &\in \{0,1,2,\ldots\}\\
X &\sim \mathrm{G}(p=0,12)\\
P(X=x) &= (1-0,12)^x \cdot 0,12\\
P[X=0] &= 0.12
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
X &: \text{número de vendas em 10 contatos}\\
x &\in \{0,1,2,\ldots,10\}\\
X &\sim \mathrm{B}(n=5, p=0,12)\\
P(X=x) &= \binom{10}{x} 0,12^x 0,88^{10-x}\\
P[X\geq 2] &= 1-P[X=0]-P[X=1] = 0.109
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
X &: \text{número de requisições}\\
x &\in \{0,1,2,\ldots\}\\
X_i &\sim \mathrm{P}(\lambda=7,4)\\
P(X_i=x) &= \frac{\mathrm{e}^{-7,4} 7,4^x}{x!}\\
P[X_i>5] &= 1-P[X_i\leq 5] = 0.608\\
X_{ii} &\sim \mathrm{P}(\lambda=7,4/4)\\
P(X_{ii}=x) &= \frac{\mathrm{e}^{-7,4/4}(7,4/4)^x}{x!}\\
P[X_{ii}=0] &= 0.157
\end{aligned}
$$

Soluções computacionais (em linguagem `R`)

```
> qa1 <- dhyper(0, m=15, n=35, k=3)
> qa2 <- dhyper(3, m=15, n=35, k=3)
> qb <- dgeom(0, prob=0.12)
> qc <- pbinom(2, size=10, prob=0.12, lower=FALSE)
> qd1 <- ppois(6, lambda=7.4, lower=FALSE)
> qd2 <- dpois(0, lambda=7.4/4)
```

Semana 7 (av-05)

1. Assume-se que o tempo entre acessos a um blog tem uma distribuição com média de 1,5 segundos. Assumindo a distribuição exponencial responda os itens a seguir.
   (a) Quais as características do problema que fazem com que a distribuição exponencial seja uma escolha razoável?
   (b) Qual a probabilidade de haver duas conexões com intervalo inferior a 1,5 segundos?
   (c) Qual a probabilidade de se passarem 5 segundos sem conexão alguma?
   (d) Tendo havido uma conexão, qual a probabilidade da próxima conexão ocorrer entre 0,5 e 2,5 segundos?
   (e) Se já se passou 1 segundo sem conexão, qual a probabilidade de se passar mais 0,5 segundos adicionais sem conexão?
   (f) Qual a probabilidade do intervalo entre conexões não superar 3,5 segundos se já se passaram 2 segundos sem conexão?

Solução:

$$\begin{aligned} X &: \text{intervalo de tempo entre conexões (segundos)} \\ X &\sim \text{Exp}(\lambda = 1/1,5 = 2/3) \\ f(x) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2x/3}\ \ \mathrm{I}_{(0,\infty)}(x) &\qquad F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2x/3} \end{aligned}$$

(a) A distribuição exponencial é razoável considerando-se que: (i) que devem ser valores positivos, (ii) pela possibilidade de cálculos com as informações fornecidas, (iii) espera-se que a probabilidade de intervalo entre conexões seja maior para pequenos intervalos e torne-se menor com o aumento do intervalo de tempo.

(b) $P[X < 1,5] = \int_0^{1,5} f(x)\mathrm{d}x = F(1,5) = 0.63$

(c) $P[X > 5] = \int_5^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(5) = 0.036$

(d) $P[X < 0,5] = \int_{0,5}^{2,5} f(x)\mathrm{d}x = F(2,5) - F(0,5) = 0.53$

(e) $P[X > 1,5|X > 1] = \frac{\int_{1,5}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x}{\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x} =$ [1] $P[X > 0,5] = 1 - F(0,5) = 0.72$

(f) $P[X < 3,5|X > 2] = \frac{\int_2^{3,5} f(x)\mathrm{d}x}{\int_2^{3,5} f(x)\mathrm{d}x} = \frac{F(3,5)-F(2)}{1-F(2)} =$ [1] $P[X < 1,5] = F(1,5) = 0.63$

---

2. O peso de um tênis de corrida sofisticado é normalmente distribuído com média de 12 onças (onça é uma unidade de peso) e desvio padrão de 0,5 onças.
   (a) qual a probabilidade de um tênis pesar mais que 13,2 onças?
   (b) qual a probabilidade de um tênis pesar entre 11,6 e 12,7 onças?
   (c) quanto deveria ser o desvio padrão para que 99,9% dos tênis tenham menos que 13 onças?
   (d) se o desvio padrão se mantiver em 0,5, quanto deveria ser a média para que 99,9% dos tênis tenham menos que 13 onças?

Solução:

$$X \sim N(12, 0.5^2)$$

(a) $P[X > 13,2] = P[Z > \frac{13,2-12}{0,5}] = P[Z > 2.4] = 0.0082$

(b) $P[11,6 < X < 12,7] = P[\frac{11,6-12}{0,5} < Z < \frac{12,7-12}{0,5}] = P[-0.8 < Z < 1.4] = 0.707$

(c)

$$\begin{aligned} X &\sim N(12, \sigma^2) \\ P[X < 13] &= 0,999 \ \ ; \ \ \sigma = ? \\ P[Z < \frac{13-12}{\sigma}] &= 0,999 \\ z &= 3.09 \\ \frac{13-12}{\sigma} &= 3.09 \\ \sigma &= 0.324 \end{aligned}$$

(d) se o desvio padrão se mantiver em 0,5, quanto deveria ser a média para que 99,9% dos tênis tenham menos que 13 onças?

$$\begin{aligned} X &\sim N(\mu, 0.5^2) \\ P[X < 13] &= 0,999 \ \ ; \ \ \mu = ? \\ P[Z < \frac{13-\mu}{0,5}] &= 0,999 \\ z &= 3.09 \\ \frac{13-\mu}{0,5} &= 3.09 \\ \mu &= 13 - 0,5(3.09) \\ \mu &= 11.455 \end{aligned}$$

---

[1] propriedade de falta de memória da exponencial