CE-003: Estatística II - Turma K/O - Avaliações Semanais (2^o semestre 2013)

Semana 2

1. Dois profissionais vão tentar resolver um problema e cada um deles pode ou não conseguir resolver. A chance do primeiro resolver é de 60% e do segundo 45%. Neste contexto responda às questões abaixo, fazendo suposições se necessário.
   (a) Por que este pode ser considerado um experimento aleatório?
   (b) Qual o espaço amostral?
   (c) Qual a probabilidade de que ambos resolvam o problema?
   (d) Qual a probabilidade de que o problema seja resolvido?
   (e) Foi necessária alguma suposição para para resolver os items anteriores? Se positivo, qual suposição?

   Solução:
   Notação:

$$A : \text{o primeiro resolve o problema} \quad P[A] = 0,60 \quad P[\overline{A}] = 0,40$$
$$B : \text{o segundo resolve o problema} \quad P[B] = 0,45 \quad P[\overline{B}] = 0,55$$

   (a)
   (b) $\Omega = \{(A,B),(A,\overline{B}),(\overline{A},B),(\overline{A},\overline{B})\}$
   (c) Supondo independência: $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] = 0,60 \cdot 0,45 = 0.27$
   (d) Supondo independência: $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,60 + 0,45 - 0.27 = 0.78$
   (e) Independência entre os profissionais, ou seja, a probabilidade de cada um resolver independe do problema ser ou não resolvido pelo outro.

---

2. (adaptado de M. & L., 2002) Em um levantamento de dados de acidentes em uma estrada foram resumidos na tabela a seguir. A partir desses dados, responda às questões propostas.

	Vítimas fatais	
Motorista	Sim	Não
Sóbrio	1228	275
Alcoolizado	2393	762

   (a) Voce diria que o fato do motorista estar ou não alcoolizado afeta a chance de ocorrer vítimas fatais? Justifique.
   (b) Obtenha a partir da tabela acima: (a) alguma probabilidade marginal, (b) alguma probabilidade condicional, (c) alguma probabilidade de interseção de eventos.
   (c) Cite um par de eventos mutuamente exclusivos.
   (d) Se um motorista alcoolizado se envolve em um acidente, qual a probabilidade de haver vítima fatal?
   (e) Se houve uma vítima fatal em um acidente, qual a probabilidade do motorista estar alcoolizado?

   Notação:

$$S : \text{motorista sóbrio} \qquad A \equiv \overline{S} : \text{motorista alcoolizado}$$
$$F : \text{acidante com vítima fatal} \qquad NF \equiv \overline{F} : \text{acidente sem vítima fatal}$$

Solução:

(a) Concluir comparando as proporções (probabilidades) de vítima fatal entre sóbrios e alcoolizados, ou seja as probabilidades condicionais $P[F|S]$ e $P[F|A]$, que são dadas por:

```
     S      A
0.8170 0.7585
```

(b) i. Probabilidades marginais:

$$P[A] = \frac{3155}{4658} = 0.677 \quad ; \quad P[S] = P[\overline{A}] = \frac{1503}{4658} = 0.677$$
$$P[A] = \frac{3621}{4658} = 0.777 \quad ; \quad P[S] = P[\overline{A}] = \frac{1037}{4658} = 0.223$$

ii. Probabilidades conjuntas (interseção):

$$P[A \cap F] = \frac{2393}{4658} = 0.514 \quad ; \quad P[S \cap F] = \frac{1228}{4658} = 0.264$$
$$P[A \cap NF], = \frac{762}{4658} = 0.164 \quad ; \quad P[S \cap NF] = \frac{275}{4658} = 0.059$$

iii. Probabilidades condicionais: $P[A|F], P[S|F], P[F|A], P[NF|A]$

$$P[A|F] = \frac{2393}{3621} = 0.661 \quad ; \quad P[S|F] = P[\overline{A}] = \frac{1228}{3621} = 0.339$$
$$P[A|NF] = \frac{762}{1037} = 0.735 \quad ; \quad P[S|NF] = P[\overline{A}] = \frac{275}{1037} = 0.265$$
$$P[F|A] = \frac{2393}{3155} = 0.758 \quad ; \quad P[NF|A] = P[\overline{A}] = \frac{762}{3155} = 0.242$$
$$P[F|S] = \frac{1228}{1503} = 0.817 \quad ; \quad P[NF|S] = P[\overline{A}] = \frac{275}{1503} = 0.183$$

(c) Pares de eventos mutuamente exclusivos: F e NF

- *com vítima fatal* e *sem vítima fatal* (F e NF)
- *sóbrio* e *alcoolizado* (S e A)

(d) $P[F|A] = \frac{P[F \cap A]}{P[A]} = \frac{2393}{2393+762} = 0.661$

(e) $P[A|F] = \frac{P[A \cap F]}{P[F]} = \frac{2393}{1228+2393} = 0.758$

Semana 3

1. Um instituto que faz previsões meteorológicas fez uma avaliação de suas previsões de 48 horas para finais de semana feitas por um particular modelo de previsão. Foi verificado que a previsão indicava chuva em 80% dos dias que de fato choveu e previa não chuva em 92% dos dias em que não choveu. Verificou-se ainda que chove em 12% dos períodos.
   (a) Escreva em notação de probabilidades adequada as informações dadas no problema.
   (b) Qual a probabilidade (proporção) de previsão de chuva?
   (c) Qual a probabilidade de chover quando há uma previsão de chuva?
   (d) Qual a probabilidade de obter uma previsão incorreta?
   (e) Supondo os mesmos percentuais de acertos de previsão, qual seria a probabilidade de acerto de uma previsão de chuva em outra região em que chove em apenas 5% dos períodos?

Solução:
Notação:

A : previsão de chuva na região — $\overline{A}$: previsão de chuva

C : chove no período — $\overline{C}$: não chove no período

(a)

$$P[C] = 0,12 \qquad P[\overline{C}] = 0,88$$
$$P[A|C] = 0,80 \qquad P[\overline{A}|C] = 0,20$$
$$P[\overline{A}|\overline{C}] = 0,92 \qquad P[A|\overline{C}] = 0,08$$

(b) $P[A] = P[A \cap C] + P[A \cap \overline{C}] = P[A|C] \cdot P[C] + P[A|\overline{C}] \cdot P[\overline{C}] = (0,80)(0,12) + (0,08)(0,88) = 0.166$

(c) $P[C|A] = \frac{P[C \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A|C] \cdot P[C]}{P[A]} = \frac{(0,80)(0,12)}{0.166} = 0.577$

(d) $P[C|\overline{A}] + P[\overline{C}|A] = \frac{P[C \cap \overline{A}]}{P[\overline{A}]} + \frac{P[\overline{C} \cap A]}{P[A]} = \frac{P[\overline{A}|C] \cdot P[C]}{P[\overline{A}]} + \frac{P[A|\overline{C}] \cdot P[\overline{C}]}{P[A]} = \frac{(0,20)(0,12)}{0.834} + \frac{(0,08)(0,88)}{0.166} = 0.452$

(e) Nesse caso:

$$P[C] = 0,05 \qquad P[\overline{C}] = 0,95$$

e recalculando temos:

$$P[A] = P[A \cap C] + P[A \cap \overline{C}] = P[A|C] \cdot P[C] + P[A|\overline{C}] \cdot P[\overline{C}] = (0,80)(0,05) + (0,08)(0,95) = 0.116.$$

A probabilidade de acertar uma previsão de chuva fica:

$$P[C|A] = \frac{P[C \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A|C] \cdot P[C]}{P[A]} = \frac{(0,80)(0,05)}{0.116} = 0.345$$

Semana 4

1. Em um teste com quatro questões de múltipla escolha, cada questão possui cinco alternativas com apenas uma delas correta. Estamos interessados na situação de "acerto casual", na qual a resposta de cada questão é escolhida ao acaso, supondo que todas as questões são respondidas.
   (a) Defina a v.a. de interesse.
   (b) Obtenha a função de probabilidades.
   (c) Obtenha a função de distribuição (acumulada).
   (d) Obtenha o valor esperado da v.a.

   Suponha agora que para cada acerto ganha-se dois pontos e perde-se um ponto para cada erro.

   (e) Sob as mesmas condições, obtenha a distribuição de probabilidades do número de pontos ganhos.

   Solução:

   (a) X : número de acertos

   (b)

x	0	1	2	3	4
$P[X=x]$	$(4/5)^4 =$ $= 0.4096$	$4(1/5)^1(4/5)^3 =$ $= 0.4096$	$6(1/5)^2(4/5)^2 =$ $= 0.1536$	$4(1/5)^3(4/5)^1 =$ $= 0.0256$	$(1/5)^4 =$ $= 0.0016$

   (c)

x	0	1	2	3	4
$F(x) = P[X \leq x]$	0.4096	0.8192	0.9728	0.9984	1

   (d) $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{4} x_i P[X = x_i] = 0,8$

   (e) Y : pontos obtidos. Y é uma transformação 1-1 de X e portanto $P[Y = y_i] = P[X = x_i]$.

x	0	1	2	3	4
y	-4	-1	2	5	8
$P[Y=y]$	0.4096	0.4096	0.1536	0.0256	0.0016

   Solução alternativa: usar o fato que $X \sim B(n = 4, p = 1/5)$

---

2. Seja X uma v.a. com função de distribuição de probabilidades dada por:

$$f(x) = \begin{cases} c\,x & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Obtenha o valor de c.
(b) Calcule $P[X > 2]$
(c) Calcule $P[1,2 < X < 3,5]$
(d) Calcule $P[X < 3|X > 1,5]$
(e) Obtenha a $E[X]$
(f) Obtenha k tal que $P[X > k] = 0,5$

Solução:

(a)

$$\int_0^4 c\,x \;\; \mathrm{d}x = 1$$
$$c = 1/8$$

(b) $P[X > 2] = \int_2^4 x/8 \;\; \mathrm{d}x = 0,75$
(c) Calcule $P[1,2 < X < 3,5] \int_2^4 x/8 \;\; \mathrm{d}x = 0.6756$
(d) Calcule $P[X < 3|X > 1,5] = \frac{P[1,5<X<3]}{P[X>1,5]} = 0.4909$
(e) $E[X] = \int_0^4 x \cdot x/8 \;\; \mathrm{d}x = (1/8)4^3/3 = 8/3 = 2,67$
(f)

$$\int_0^k x/8 \;\; \mathrm{d}x = 0.5$$
$$(1/8)k^2/2 = 0,5$$
$$k = \sqrt{8}$$

Semana 5

1. Suponha que a posição na qual ocorre um dano em um disco pode ser considerada uma variável uniforme com valores entre 0 e 100 (valores percentuais em relação a capacidade total do disco). Define-se ainda que a porção inicial do disco corresponde aos 15% iniciais, a porção intermediária entre 15 e 80% e a porção nos restantes 20%.

   (a) Defina a v.a. de interesse, a função de densidade de probabilidades e a função de distribuição (acumulada).
   (b) Obtenha a probabilidade do dano ocorrer na porção inicial do disco.
   (c) Obtenha a probabilidade do dano ocorrer na porção final do disco, sabendo que não ocorreu na inicial.
   (d) Obtenha a probabilidade do dano ocorrer na porção inicial ou final do disco.
   (e) Defina uma nova variável dada pela porção do disco onde ocorre a falha e monte a sua distribuição de probabilidades.

   Considere agora que serão examinados cinco discos com dano e estamos interessados no número de discos que apresenta dano na porção inicial.

   (f) Defina a v.a. de interesse, identifique o seu *tipo* e obtenha a distribuição de probabilidades.
   (g) Calcule a probabilidade de obter no máximo um dos discos com dano na porção inicial.
   (h) Se forem examinados 100 lotes de cinco discos, qual deve ser o número médio de discos por lote SEM dano na porção inicial?

Solução:

(a)

$$X: \text{número de acertos}$$
$$f(x) = \frac{1}{100-0} = \frac{1}{100}$$
$$F(x) = \frac{x-0}{100-0} = \frac{x}{100}$$

(b)

$$P[0 < X < 15] = \int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{100}x\Big|_0^{15} = \frac{1}{100}(15-0) = 0,15$$
ou
$$P[0 < X < 15] = F(15) = \frac{15}{100} = 0,15$$

(c)

$$P[80 < X < 100|X > 15] = \frac{P[80 < X < 100 \cap X > 15]}{P[X > 15]} = \frac{P[80 < X < 100]}{P[X > 15]} = \frac{\int_{80}^{100} f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{15}^{100} f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{20/100}{85/100} = 0.235$$
ou
$$P[80 < X < 100|X > 15] = \frac{1-F(80)}{1-F(15)} = 0.235$$

(d)

$$P[X < 15 \cup X > 80] = P[X < 15] + P[X > 80] = \frac{15}{100} + \frac{20}{100} = 0,35$$
ou
$$P[X < 15 \cup X > 80] = F(15) + (1 - F(80)) = \frac{15}{100} + (1 - \frac{80}{100}) = 0,35$$

(e)

$$Y: \text{ porção do disco onde ocorre dano}$$

y	inicial	intermediária	final
P[Y=y]	0,15	0,65	0,20

(f)

$$Z: \text{ número de discos com dano entre cinco discos na porção inicial}$$
$$Z \sim B(n = 5, p = 0,15)$$
$$P[Z = z] = \binom{5}{z}(0,15)^z\,(1-0,15)^{5-z}$$

(g) $P[Z \leq 1] = P[Z = 0] + P[Z = 1] = \binom{5}{0}(0,15)^0\,(1-0,15)^{5-0} + \binom{5}{1}(0,15)^1\,(1-0,15)^{5-1} = 0.444 + 0.392 = 0.835$

(h) $\mathrm{E}[X] = n \cdot p = 5 \cdot (0,15) = 0,75$
