CE-003: Estatística II - Turma: MD, 1^a Prova (10/03/2014)

GRR: ________________ **Nome:** ____ **Turma:** _________

1. Peças que saem de uma linha de produção são marcadas como defeituosas (D) ou não defeituosas (N). A proporção de peças defeituosas na linha de produção é denotada por p. Peças são inspecionadas e sua condição (D ou N) é registrada. Isto é feito até que duas peças defeituosas consecutivas sejam fabricadas ou que quatro peças tenham sido inspecionadas, aquilo que ocorrer primeiro.

   (a) Descreva o espaço amostral do experimento.

   (b) Atribua probabilidades a cada ponto do espaço amostral.

   (c) Qual (quais) a(s) suposição(ções) feita(s) no cálculo das probabilidades.

   (d) Qual a probabilidade do evento *quatro peças são inspecionadas*.

   (e) Qual a probabilidade do evento *quatro peças são inspecionadas sabendo-se que a primeira inspecionada era defeituosa.*

   Solução:

   (a)

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(D,D),(N,D,D),(D,N,D,D),(D,N,D,N),(D,N,N,D),(N,N,D,D),(N,D,N,D),\\ &(D,N,N,N),(N,D,N,N),(N,N,N,D),(N,N,D,N),(N,N,N,N)\}\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}\{(D,D)\} &: P = p^2\\ \{(N,D,D)\} &: P = (1-p)p^2\\ \{(D,N,D,D)\} &: P = (1-p)p^3\\ \{(D,N,D,N),(D,N,N,D),(N,N,D,D),(N,D,N,D)\} &: P = (1-p)^2p^2\\ \{(D,N,N,N),(N,D,N,N),(N,N,N,D),(N,N,D,N)\} &: P = (1-p)^3p\\ \{(N,N,N,N)\} &: P = (1-p)^4\end{aligned}$$

   (c) Indepêndencia, probabilidade p permanece constante.

   (d)

$$\begin{aligned}&P[(D,N,D,D),(D,N,D,N),(D,N,N,D),(N,N,D,D),(N,D,N,D),\\ &\quad(D,N,N,N),(N,D,N,N),(N,N,N,D),(N,N,D,N),(N,N,N,N)] =\\ &\quad= (1-p)^1 * p^3 + 4*(1-p)^2*p^2 + 4*(1-p)^3*p + (1-p)^4\end{aligned}$$

   ou

$$P[(D,D),(N,D,D)] = 1 - p^2 - (1-p)p^2$$

   (e)

$$P[(D,N,D,D),(D,N,D,N),(D,N,N,D),(D,N,N,N)] = (1-p)^1 * p^3 + 2*(1-p)^2 + (1-p)^4$$

---

2. Três equipes, I, II e III, vão ter jogos contra outros adversários em uma determinada rodada de um campeonato. Informações sobre as equipes e resultados anteriores mostram que a probabilidade de I vencer o seu jogo é de 0,7; enquanto que a probabilidade de II vencer seu jogo é de 0,5 e a de III é 0,9. Não há a possibilidade de empate nos jogos. Considere como independentes os resultados das três equipes na rodada e responda às questões a seguir.

   (a) O resultado da rodada é um experimento aleatório? Porque?

   (b) Qual o espaço amostral?

   (c) Qual a probabilidade de alguma das equipes (ao menos uma) perder a sua partida?

   (d) Sabendo-se que III venceu a partida, qual a probabilidade de que ambas as demais equipes tenham pedido?

   (e) Os eventos I *vence o jogo* e II *vence o jogo* são mutuamente exclusivos? Justifique.

Solução:

$$\begin{gathered}\text{Eventos :}\\ \text{I equipe I vence a partida} \;\; ; \;\; P[I] = 0,7 \;\; ; \;\; P[\overline{I}] = 0,3\\ \text{II equipe II vence a partida} \;\; ; \;\; P[II] = 0,5 \;\; ; \;\; P[\overline{II}] = 0,5\\ \text{III equipe III vence a partida} \;\; ; \;\; P[III] = 0,9 \;\; ; \;\; P[\overline{III}] = 0,1\end{gathered}$$

(a) Sim, é possível dizer os resultados possíveis mas não o que vai acontecer

(b) $\Omega = \{(I, II, III), (I, II, \overline{III}), (I, \overline{II}, III), (\overline{I}, II, III), (I, \overline{II}, \overline{III}), (\overline{I}, II, \overline{III}), (\overline{I}, \overline{II}, III), (\overline{I}, \overline{II}, \overline{III})\}$

Resultado	(I, II, III)	$(I, II, \overline{III})$	$(I, \overline{II}, III)$	$(\overline{I}, II, III)$
Probabilidade	$(0,7)(0,5)(0,9)$	$(0,7)(0,5)(0,1)$	$(0,7)(0,5)(0,9)$	$(0,3)(0,5)(0,9)$

Resultado	$(I, \overline{IIIII})$	$(\overline{I}, II, \overline{III})$	$(\overline{I}, \overline{II}, III)$	$(\overline{I}, \overline{II}, \overline{III})$
Probabilidade	$(0,7)(0,5)(0,1)$	$(0,3)(0,5)(0,1)$	$(0,3)(0,5)(0,9)$	$(0,3)(0,5)(0,1)$

(c) $P[\text{alguma equipe perder}] = 1 - P[\text{todas ganharem}] = 1 - P[(I, II, III)] = 1 - (0,7)(0,5)(0,9) = 0,685$

(d) $P[(\overline{I}, \overline{II}, III)|(*, *, III)] = \frac{P[(\overline{I}, \overline{II}, III)]}{P[(I, II, III), (I, \overline{II}, III), (\overline{I}, \overline{II}, III)]} = \frac{(0,3)(0,5)(0,9)}{(0,7)(0,5)(0,9)+(0,7)(0,5)(0,9)+(0,3)(0,5)(0,9)+(0,3)(0,5)(0,9)} = 0,15$

(e) Não, porque a interseção entre eles não é vazia, correspondendo aos seguintes eventos:

$$\{(I, II, III), (I, II, \overline{III})\}$$

---

3. Uma empresa adquire 30% de sua matéria prima de um primeiro fornecedor, 50% de um segundo e o restante de um terceiro fornecedor. Os lotes de matéria prima são inspecionados e, se considerados não satisfatórios, são enviados de volta. Sabe-se que 2%, 5% e 1% dos lotes são retornados a cada fornecedor, respectivamente. Calcule as probabilidades de um lote tomado ao acaso:

   (a) ser do fornecedor II e não retornar;

   (b) ser devolvido;

   (c) havendo sido rejeitado, ser do fornecedor II

   (d) havendo sido rejeitado, ser do fornecedor III

   (e) havendo sido aceito, ser do fornecedor I

Solução:

4. Considere que um componente de um sistema de reconhecimento é composto de um código de três algarismos que podem ser fornecidos em qualquer ordem (podendo haver repetição de algarismos). O reconhecimento é positivo se ao menos dois algarismos corretos são fornecidos. São feitas tentativas aleatórias de reconhecimento escolhendo três algarismos (de 0 a 9) ao acaso.

   (a) Qual a probabilidade do reconhecimento ser positivo em uma tentativa qualquer?

   (b) Qual a probabilidade de conseguir reconhecimento positivo em duas tentativas consecutivas?

   (c) Qual a probabilidade de conseguir reconhecimento positivo em exatemente duas entre 10 tentativas?

   (d) Se são feitas tentativas até conseguir o primeiro reconhecimento positivo, qual a probabilidade de que sejam necessárias mais do que quatro tentativas?

   (e) Voce consegue identificar distribuições de probabilidades discretas discutidas em aula os itens anteriores? Qual(ais)?

Solução:
O problema pode ser resolvido diretamente utilizando distribuições de probabilidades "conhecidas", mas vamos aqui detalhar a solução.
Denotando por C: *algarismo correto é fornecido* e $\bar{C}$: *algarismo incorreto é fornecido*, o espaço amostral do experimento definido por uma tentativa é:

$$\Omega = \{(\bar{C}, \bar{C}, \bar{C}), (\bar{C}, \bar{C}, C), (\bar{C}, C, \bar{C}), (C, \bar{C}, \bar{C}), (\bar{C}, C, C), (C, \bar{C}, C), (C, C, \bar{C}), (C, C, C)\}.$$

As probabilidades associadas a cada ponto podem ser obtidas considerando que $P[C] = 0,1$ e independência. Desta forma $P[(\bar{C}, \bar{C}, C)] = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1$ e de forma análoga para demais.

(a) E_1 : reconhecimento ser positivo em uma tentativa

$$pR = P[E_1] = P[(C, C, \bar{C})] + P[(C, \bar{C}, C)] + P[(\bar{C}, C, C)] + P[(C, C, C)] = 3 \cdot (0,1)^2(0,9) + (0,1)^3 = 0,028$$

(b)

$$P[E_1 \cap E_1] \stackrel{ind}{=} 0,01^2 = 0,000784$$

(c) E_3: reconhecimento positivo em exatamente duas entre 10 tentativas

$$P[E_3] = \binom{10}{2}(pR)^2(1 - pR)^{10-2} = 0,02811$$

(d) E_4: mais do que quatro tentativas até primeiro reconhecimento positivo.

$$P[E_3] = 1 - P[\bar{E}_3] = 1 - (pR + (1 - pR)pR + (1 - pR)^2 pR + (1 - pR)^3 pR) = 0,89262$$

(e) Distribuição Binomial para (i) número de algarismos corretos (ii) número de tentativas positivas. Distribuição Geomérica para número de tentativas até o primeiro reconhecimento.

Utilizando distribuições de probabilidades "conhecidas" teríamos as soluções apresentadas a seguir. Definindo as variáveis aleatórias:

X_1 : número de algarísmos corretos em uma tentativa	$X_1 \sim \mathrm{B}(n = 3, p = 1/10)$
X_2 : número de tentativas corretas em 2 tentativas	$X_2 \sim \mathrm{B}(n = 2, p = P[X_1 \geq 2])$
X_3 : número de tentativas corretas em 10 tentativas	$X_3 \sim (n = 2, p = P[X_1 \geq 2])$
X_4 : número de não reconhecimentos até o primeiro positivo	$X_4 \sim \mathrm{G}(p = P[X_1 \geq 2)$

E os itens anteriores seriam respondidos como:

(a) $P[X_1 \geq 2] = P[X_1 = 2] + P[X_1 = 3] = 0,027 + 0,001 = 0,028$

(b) $P[X_2 = 2] = 0,000784$

(c) $P[X_3 = 2] = 0,02811$

(d) $P[X_4 \geq 4] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - 0,10738 = 0,89262$
